

座屈解析の基本

東海大学 山本 憲司

0 はじめに

ラチスシェルの座屈耐力を構造解析ソフトウェアを用いて解析するには、座屈解析法的基本的な知識が必要になる。座屈解析は構造物の変形後の釣合を解くことで可能になるが、その解析方法は煩雑あるいは難解なものになりがちである。また、近似の度合いに応じて様々な方法があるため、初学者にとっては理解がしにくい。ここでは座屈解析法について、最低限必要となる全般的な知識と、理解が得られやすいように具体例として2次元のトラス要素、梁要素を例に挙げて説明する。

1 座屈解析の概要

本節では有限要素法による座屈解析の全般的な内容について説明する。

1.1 座屈解析の種類

ラチスシェルの座屈解析には、線形座屈解析、弾性座屈解析、弾塑性座屈解析の3つの解析方法がある。以下に、それぞれの解析方法について簡単に説明する。また、各解析方法のイメージを図1.1に示す。

(a) 線形座屈解析

構造物が荷重の増加とともに変形することを考慮せず、線形剛性と幾何剛性のみを用いて、座屈荷重の概算値を算定する方法である(具体的な解析方法は1.3節で説明する)。座屈荷重は固有値解析によって求められる。多くの場合、実際の座屈荷重より大きな値が得られる。線形座屈解析により求めた座屈荷重は線形座屈荷重と呼ばれる。

(b) 弾性座屈解析

構造物が荷重の増加とともに弾性変形しながら座屈する時の座屈点を求める方法である。増分解析によって荷重(あるいは特定点の変位やその他の経路パラメータ)を増加させながら釣合状態を少しずつ求め、座屈に至るまでの挙動が解析される(具体的な解析方法は1.2節で説明する)。この解析により求めた座屈荷重は弾性座屈荷重と呼ばれる。

(c) 弾塑性座屈解析

上述の弾性座屈解析に、更に構造部材の降伏、塑性による剛性劣化や変形進行の影響を考慮して座屈挙動を解析する方法である。座屈時に材料降伏の影響を受けているのであれば、通常、座屈荷重は3つの解析の中で最も小さな値が得られる。この解析により求めた座屈荷重は弾塑性座屈荷重と呼ばれる。

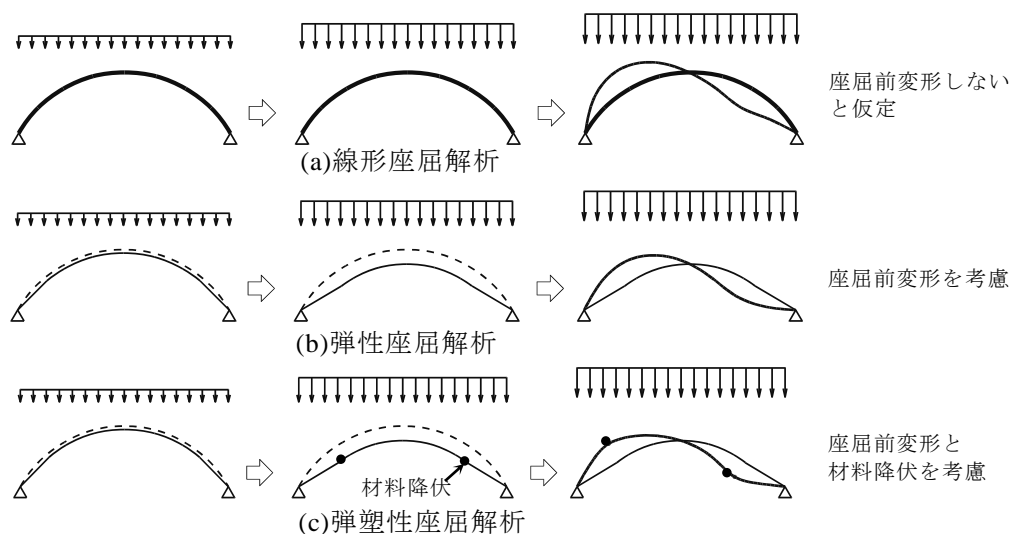


図 1.1 座屈解析の種類

1.2 非線形座屈解析

有限要素法による線形構造解析は、次式のような釣合式を解くことで解析される。

$$\mathbf{K}_L \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (1.1)$$

ここに、 \mathbf{K}_L は線形剛性マトリクス、 \mathbf{d} は節点変位ベクトル、 \mathbf{f} は外力ベクトルである。線形剛性マトリクスは微小変形の仮定のもとで導出される構造物の剛性を表すマトリクスである。

一方で、弾性座屈解析や弾塑性座屈解析などの非線形座屈解析では、部材の有限変形（大変形）を考慮した定式化がなされる。この場合、釣合式は節点変位ベクトル \mathbf{d} に対して非線形な方程式となる。これを次式のように表す。

$$\mathbf{q}(\mathbf{d}) = \lambda \mathbf{f} \quad (1.2)$$

ここに、 \mathbf{q} は内力ベクトルであり、 \mathbf{d} の非線形関数であることを括弧で表している。また、座屈解析では外力の分布を変化させずに比例载荷することが多い為、外力は外力モード \mathbf{f} と外力の大きさを表す荷重係数 λ の積として表現してある。(1.2)式の非線形方程式から、直接的に座屈時の釣合状態を求める事は困難であるので、通常は、荷重と変位が $\mathbf{0}$ の初期状態から少しずつ荷重（あるいは特定点の変位やその他の釣合経路パラメータ）を増やして釣合状態を求める増分解析が行われる。

(1.2)式の釣合状態を表す変数は、 \mathbf{d} と λ であり、今、 $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0, \lambda = \lambda_0$ で釣合が満たされているものとする。

$$\mathbf{q}(\mathbf{d}_0) = \lambda_0 \mathbf{f} \quad (1.3)$$

この釣合状態から少し先に進んだ、別の釣合状態を求めることを考える。これを次式のように表す。

$$\mathbf{q}(\mathbf{d}_0 + \Delta \mathbf{d}) = (\lambda_0 + \Delta \lambda) \mathbf{f} \quad (1.4)$$

ここに、 $\Delta \mathbf{d}, \Delta \lambda$ は \mathbf{d}_0, λ_0 からの増分を表す。上式を満たす $\Delta \mathbf{d}, \Delta \lambda$ を求める。

上式の左辺の内力ベクトルに対し、次式のようにテーラー展開の一次近似を行う。

$$\mathbf{q}(\mathbf{d}_0 + \Delta\mathbf{d}) \approx \mathbf{q}(\mathbf{d}_0) + \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial d_1} & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial d_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial d_N} \end{bmatrix} \Delta\mathbf{d} \quad (1.5)$$

ここに、上式は節点変位ベクトルの自由度を N とし、 $\mathbf{d} = [d_1 \ d_2 \ \dots \ d_N]^T$ であるとして表現している。

(1.5)式を(1.4)式に代入し、(1.3)式の関係を検討すると、次の増分形の釣合式が得られる。

$$\mathbf{K}_T \Delta\mathbf{d} = \Delta\lambda \mathbf{f} \quad (1.6)$$

ここに、 $\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial d_1} & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial d_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial d_N} \end{bmatrix}$ であり、接線剛性マトリクスと呼ばれる。

図 1.2 は荷重係数 λ と一つの変位成分 d_i の関係を模式的に表したものである。図中の曲線は、釣合式を満たす点の集合で表される釣合経路である。接線剛性マトリクスは釣合経路曲線の傾きに相当するものであり、(1.6)式の増分形の釣合式は、釣合点 $\mathbf{E}(\mathbf{d}_0, \lambda_0)$ から少し進んだ釣合点を \mathbf{E} 点での傾きを用いて図のように線形近似した関係を表している。

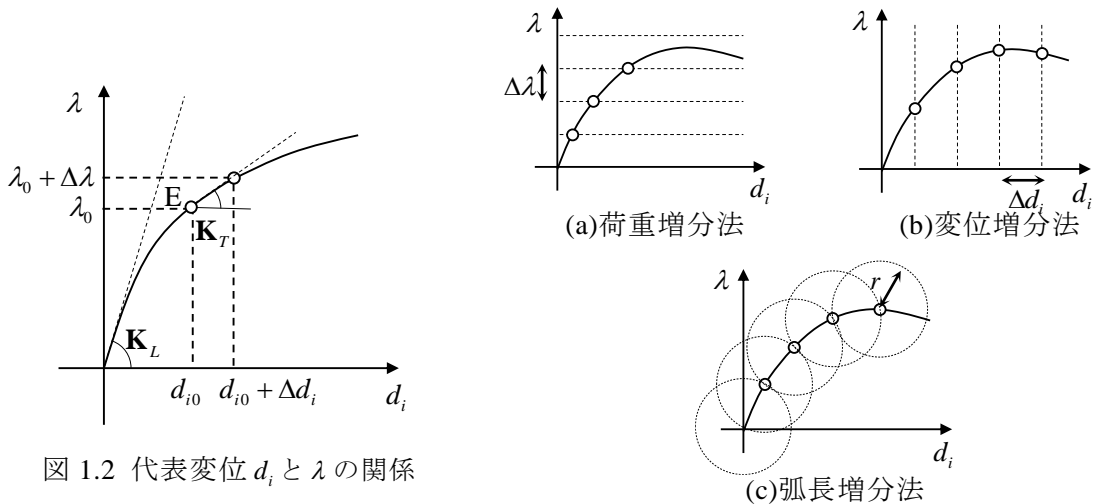


図 1.2 代表変位 d_i と λ の関係

図 1.3 増分解析の種類

(1.6)式は $\Delta\mathbf{d}$ と $\Delta\lambda$ をともに未知量として解くことはできない。荷重増分法では荷重増分 $\Delta\lambda$ を既知量として与え、変位増分 $\Delta\mathbf{d}$ を求める。ただし、(1.6)式は線形近似した関係であるので、これを解いて $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 + \Delta\mathbf{d}$, $\lambda = \lambda_0 + \Delta\lambda$ と更新しても、誤差を生じて釣合を満たさない場合も多い。この為、実際には釣合を十分満たすまで、次式のようなニュートンラプソン法による繰り返し計算が行われる。

$$\mathbf{K}_T \Delta\mathbf{d}^{(k+1)} = (\lambda_0 + \Delta\lambda) \mathbf{f} - \mathbf{q}(\mathbf{d}_0 + \Delta\mathbf{d}^{(1)} + \Delta\mathbf{d}^{(2)} + \dots + \Delta\mathbf{d}^{(k)}) \quad (1.7)$$

ここに $\Delta\mathbf{d}$ の上添え字の括弧内は反復計算のステップ数である。右辺は、 $\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 + \Delta\mathbf{d}^{(1)} + \Delta\mathbf{d}^{(2)} + \dots + \Delta\mathbf{d}^{(k)}$ と変位ベクトルを累加した状態での不釣合力を表す。

荷重増分法では、荷重係数が極大値を取った先の釣合経路が負勾配となる釣合状態は求める事ができない (図 1.3(a))。このような釣合状態を求めるには他の増分解析法を用いる必要がある。(1.6)式の関係に対して $\Delta\mathbf{d}$ の一つの成分 Δd_i を既知量とし、それ以外の $\Delta\mathbf{d}$ の成分と $\Delta\lambda$

を未知量として解く変位増分法（図 1.3(b)）や、(1.6)式に $\Delta \mathbf{d}^T \Delta \mathbf{d} + \Delta \lambda^2 = r^2$ (r : 弧長パラメータ) の条件を付加して求める弧長増分法（図 1.3(c)）などがある^{1),2)}。

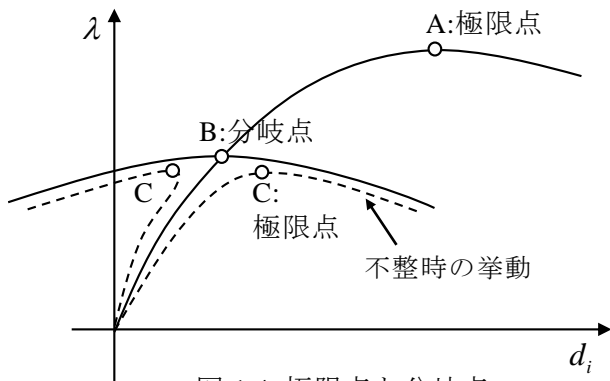


図 1.4 極限点と分岐点

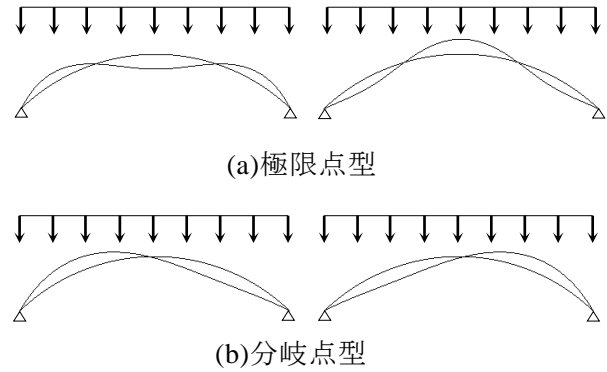


図 1.5 座屈モードの例

増分解析により釣合点を次々と求めていくと、荷重係数がピークとなる釣合点が見つかる（図 1.4 の A 点）。このような座屈点を極限点と呼ぶ。

一方で、構造物と外力の分布が何らかの共通した対称性を有しているとき、釣合経路上のある釣合点から枝分かれするように別の釣合経路が現れる場合がある（図中の B 点）。このような座屈点は分岐点と呼ばれる。

極限点は増分解析で釣合経路を追っていけば見つけることができる。一方で、分岐点は特別な計算をしない限りそのまま通り過ぎて見落とすことになるため、注意が必要である。

分岐点を見付ける最も簡単な方法は、構造物の形状にわずかな初期不整を与えて対称性を予め崩しておく方法である。この場合、初期不整をもつ構造物は図 1.4 中の点線で示すように元の経路と分岐経路を沿うように連続的に挙動し、それまで分岐点であった座屈点が極限点（C 点）へと変化する（ただし、分岐後荷重係数が上昇する安定分岐型の座屈の場合は、分岐点近傍で変位は急激に進むものの、極限点は現れない）。形状初期不整の分布には、後述の線形座屈解析によって得られる線形座屈モードがよく用いられる。線形座屈解析の 1 次の座屈モードに限らず、他の低次モードが最小の弾性座屈として現れる可能性があるため、複数の低次モードを不整分布として与えそれぞれ解析するのが望ましい。

分岐点を確実に見付ける方法に、接線剛性マトリクス \mathbf{K}_T の固有値を求める方法がある。この方法は、増分解析で釣合点が得られる度に次の固有値解析を実行する。

$$\mathbf{K}_T \phi = \lambda_i \phi \tag{1.7}$$

ここに λ_i は i 次の固有値、 ϕ は i 次の固有モードを表す。

接線剛性マトリクスはその釣合状態での構造物の剛性を表している。釣合経路上で $\lambda_i = 0$ となる固有値が得られた場合、その固有モード ϕ の変形に対して剛性（増分荷重）が 0 であることを意味するから、不安定な状態であり座屈点と判断できる。 $\lambda_i = 0$ となる時の固有モード ϕ は座屈モードと呼ばれる。実際には求めた釣合点の固有値が都合よく丁度 0 とはならない

が、特定の固有モードの固有値が正から負へと転じた時点でその近傍に座屈点があると判断できる。

対称な荷重を受ける対称アーチの座屈モードの例を図 1.5 に示す。図(b)のように分岐点での座屈モードは、座屈モードを反転（正負の符号の入れ替え）させても構造挙動は変わらないのに対し、図(a)のように極限点での座屈モードは、座屈モードを反転させると同じ挙動にならないモードになっている。

1.3 線形座屈解析

線形座屈解析の方法について説明する。

構造物は外力を受けながら変形するにつれて剛性が変化し、この剛性は上述(1.6)式の接線剛性マトリクス \mathbf{K}_T によって表される。構造物の初期状態からの剛性の変化は、構造物が変形する（形を変える）ことによる剛性変化と、部材内に応力が発生することによる剛性変化の二つに分けて表現することができる。前者は初期変位剛性マトリクスと呼ばれ、後者は幾何剛性マトリクスと呼ばれる。接線剛性マトリクスは、一般に次のような形式で表される。

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_D(\mathbf{d}) + \mathbf{K}_G(\mathbf{q}) \quad (1.8)$$

ここに、 \mathbf{K}_L は線形剛性マトリクス、 \mathbf{K}_D は初期変位剛性マトリクス、 \mathbf{K}_G は幾何剛性マトリクスである。幾何剛性マトリクスは応力（内力ベクトル \mathbf{q} ）の関数として表現される。幾何剛性マトリクスは圧縮力を受ける部材では負の剛性となり、この項が主要な要因となって座屈が引き起こされる。なおモデル化の方法によっては、 \mathbf{K}_D は陽に表現されず、 \mathbf{K}_L を含めた形で \mathbf{K}_L と \mathbf{K}_D がひとつのマトリクスとして表現されることも多い。（グリーン歪を用いる方法では(1.8)式のように表現できるが、移動座標を用いる方法では \mathbf{K}_D は陽に分離されない。）

線形座屈解析では、構造物の変位が小さいものとして座屈前変形の影響を無視し、 $\mathbf{K}_D(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ （初期変位剛性マトリクスをゼロ）と考える。また、外力により部材に生じる応力は荷重係数 λ に比例すると考える。部材の応力は次式の線形解析により求める。

$$\mathbf{K}_L \mathbf{d}_0 = \mathbf{f} \quad (1.9)$$

上式を \mathbf{d}_0 について解いて応力（内力ベクトル）の分布 $\mathbf{q}_0 = \mathbf{K}_L \mathbf{d}_0$ を求め、これが λ に比例するものと考えて $\mathbf{q} = \lambda \mathbf{q}_0$ と近似する。通常は $\mathbf{K}_G(\lambda \mathbf{q}_0) = \lambda \mathbf{K}_G(\mathbf{q}_0)$ の関係があるので、接線剛性マトリクスを次式で近似する。

$$\mathbf{K}_T \approx \mathbf{K}_L + \lambda \mathbf{K}_G(\mathbf{q}_0) \quad (1.10)$$

座屈点では \mathbf{K}_T が特異になる（固有値がゼロになる）ことから、次の一般固有値問題の最小固有値を求めることで、線形座屈荷重係数を求めることができる。

$$[\mathbf{K}_L + \lambda_i \mathbf{K}_G(\mathbf{q}_0)] \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (1.11)$$

ここに λ_i は i 次の固有値、 $\boldsymbol{\phi}$ は i 次の固有モードを表す。

扁平なアーチやシェルでは座屈前変形の影響が大きい為、線形座屈解析による誤差は大きくなる傾向がある。また、比較的大きな曲げ応力を受けるシェルも座屈前変形が大きい為、誤差が大きい。

2 トラス要素による幾何学的非線形解析

2.1 概要

有限要素法を用いて構造物の座屈挙動を解析するには、部材の大変形を考慮したモデル化が必要になる。大変形を考慮した解析は、幾何学的非線形解析と呼ばれる。梁要素の大変形を考慮した釣合式の導出は煩雑で難解になるが、トラス要素の釣合式は比較的導出が簡単で理解が得やすい。大変形を考慮する代表的な方法にグリーン歪を用いる方法と移動座標を用いる方法がある。そこで本節ではまずトラス要素を用いて、これら二つの方法について説明する。

有限要素法では要素の歪を節点変位で表し、仮想仕事の原理により釣合式を導出することがよく行われる。ここではまず、トラスの要素の歪と節点変位の関係のモデル化について考える。図 2.1(a)は変形前に x 軸に沿っておかれたトラス要素の一端が x 方向に u_j だけ変位した時の様子を表しており、工学歪を用いた場合の歪が図中に記されている。ただしトラスは材端にのみ力を受け、要素内で歪は一定とする。この図のように変形前の材軸に沿ってトラスが変形する場合、歪は正確に評価される。図 2.1(b)はトラス要素の一端が x 方向, y 方向にそれぞれ u_j, v_j だけ変位した場合である。微小変形を仮定した線形解析では材軸に直交方向の変形の影響を無視し、歪は図 2.1 (a)と同じとして評価される。

図 2.1(c)はグリーン歪を適用した場合である。式中に v_j の影響が含まれることが分かる。

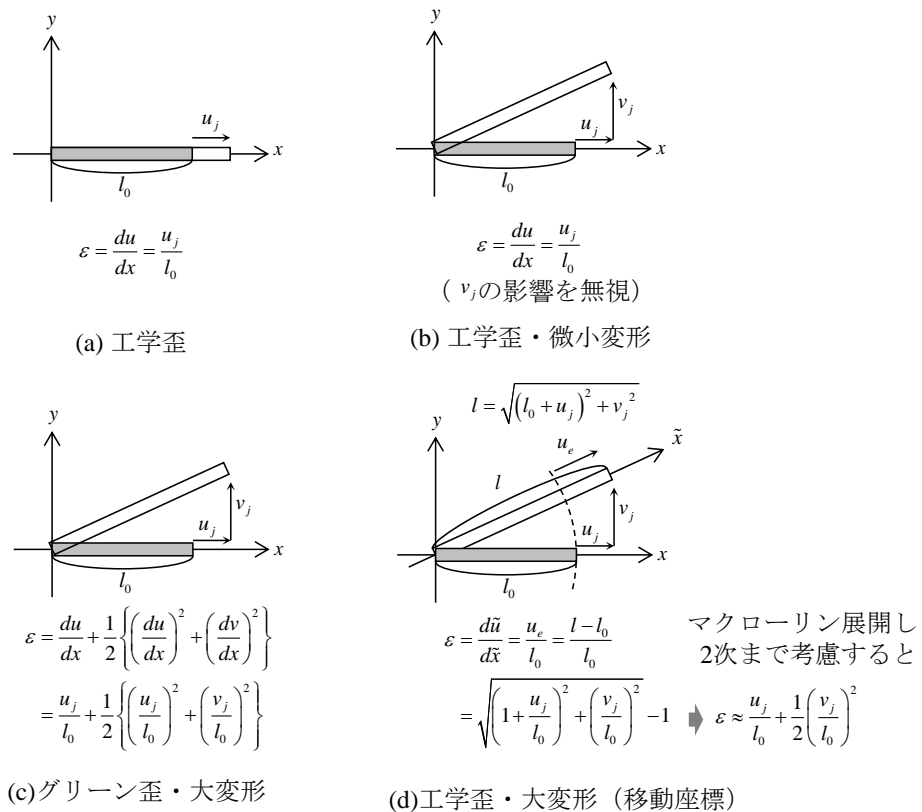


図 2.1 歪と変形の関係

グリーン歪は剛体変形の影響を受けない歪であり、また節点変位の多項式関数で簡潔に表現できるため、大変形の解析に好んで用いられる（詳細は後述する）。

大変形を考慮するもう一つの方法に、図 2.1(d)のように部材の変形から剛体変形を取除き、変形後の材軸方向に x 座標を取り直して歪を評価する移動座標⁴⁾による方法がある。この移動座標に沿って工学歪を評価すると、グリーン歪のような 2 次の多項式にはならず平方根を含んだやや複雑な表現になる。しかし、使い慣れた歪を用いているのでモデル化の意味は直感的に理解しやすい。(c)と(d)では歪の定義が異なる為同じ変形でも異なる値をとるが、変形に剛体変形が多く含まれ、歪の値そのものが小さい場合には、両者の計算結果は良く一致する。また(d)の図中には歪を u_j, v_j に対してマクローリン展開し、2 次の項まで採用した場合も示している。グリーン歪とよく似た表現になるが、 du/dx の 2 乗の項が無い。この結果から、グリーン歪による定式化の際に du/dx の 2 乗の項を落として解析することもよく行われる。

以降では、図 2.1(b),(c),(d)の歪の三つの取り扱いについてそれぞれ仮想仕事の原理を用いて釣合式を具体的に導出し、(b)では変形前の釣合式が、(c),(d)では変形後の釣合式が得られることを示す。

2.2 微小変形を仮定したトラス要素の釣合式

まず微小変形を仮定した場合の釣合式の導出を示す。部材 ij が外力を受けて変形し、 $i'j'$ に移動したとする（図 2.2.1）。図中の x, y 座標は変形前の部材 ij に対して材軸が x 軸に沿うように設けられた要素座標である。節点 i, j の節点変位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{d}_i = [u_i, v_i]^T$, $\mathbf{d}_j = [u_j, y_j]^T$ と表す。部材の変形前の長さを l_0 とする。

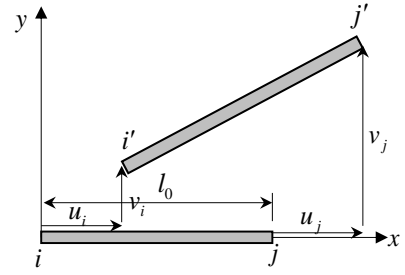


図 2.2.1 トラス要素の変位

部材の x 座標上の任意位置 x における材軸方向変位 u を次式のように材端変位 u_i, u_j を用いて一次関数で表す。

$$u = (1 - \xi)u_i + \xi u_j \quad (2.2.1)$$

ここに $\xi = x/l_0$ である。歪に工学歪を適用すると、次式で表せる。

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{1}{l_0}(-u_i + u_j) = \frac{1}{l_0}[-1 \ 0 \ 1 \ 0]\mathbf{d} \quad (2.2.2)$$

ここに、 $\mathbf{d} = [\mathbf{d}_i^T, \mathbf{d}_j^T]^T$ である。歪は \mathbf{d} について線形関数となっている為、仮想歪 $\delta\varepsilon$ は同形式で次式のように表せる。

$$\delta\varepsilon = \frac{1}{l_0}[-1 \ 0 \ 1 \ 0]\delta\mathbf{d} \quad (2.2.3)$$

ヤング率を E 、断面積を A とすれば、部材の軸力 N は次式で表せる。

$$N = EA\varepsilon = \frac{EA}{l_0}[-1 \ 0 \ 1 \ 0]\mathbf{d} \quad (2.2.4)$$

節点外力ベクトルを $\mathbf{f} = [F_{xi} \ F_{yi} \ F_{xj} \ F_{yj}]^T$ と表せば、仮想仕事の原理により

$$\delta U - \delta W = \int_0^{l_0} N \delta\varepsilon dx - \delta\mathbf{d}^T \mathbf{f} = \int_0^{l_0} \delta\mathbf{d}^T \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{1}{l_0} N dx - \delta\mathbf{d}^T \mathbf{f} = \delta\mathbf{d}^T \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} N - \mathbf{f} = 0 \quad (2.2.5)$$

$\delta\mathbf{d}$ が任意であることから、釣合式は次式で表せる。

$$\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} N - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.2.6)$$

上式は変形前の要素座標における材端力の釣合を表すことがわかる（図 2.2.2）。

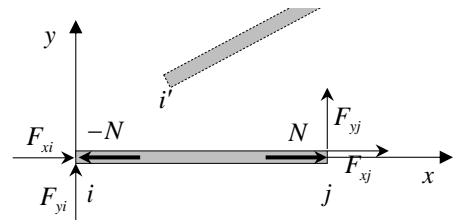


図 2.2.2 力の釣合

(2.2.4)式を上式の N に代入すれば、良く知られた次のトラス要素の釣合式を得ることができる。

$$\frac{EA}{l_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{K}_L \mathbf{d} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.2.7)$$

\mathbf{K}_L は（線形）剛性マトリクスと呼ばれる。

2.3 グリーン歪を用いたトラス要素の釣合式

変位場の扱いは 2.2 節と同じである（図 2.3.1）。部材の x 座標上の任意位置 x における材軸方向変位 u 及び材軸直交方向変位 v を次式のように材端変位 u_i, v_i, u_j, v_j の一次関数で表す。

$$u = (1-\xi)u_i + \xi u_j, \quad v = (1-\xi)v_i + \xi v_j \quad (2.3.1)$$

歪に次式のグリーン歪を適用する。

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right\} \quad (2.3.2)$$

上式に(2.3.1)式を代入すると、

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{u_j - u_i}{l_0} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{u_j - u_i}{l_0} \right)^2 + \left(\frac{v_j - v_i}{l_0} \right)^2 \right\} = \frac{l_0^2 - l_0^2 + 2(u_j - u_i)l_0 + (u_j - u_i)^2 + (v_j - v_i)^2}{2l_0^2} \\ &= \frac{\{l_0 + (u_j - u_i)\}^2 + (v_j - v_i)^2 - l_0^2}{2l_0^2} = \frac{l^2 - l_0^2}{2l_0^2} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

となり、グリーン歪のよく知られたもう一つの表現が得られる。ここに $l = \sqrt{(l_0 + u_j - u_i)^2 + (v_j - v_i)^2}$ は変形後の部材長さである。歪は変形前後の部材長 l_0, l のみで表現でき、グリーン歪は部材の剛体移動、剛体回転に影響を受けないことが分かる。

次に、仮想歪 $\delta\varepsilon$ を導くと、

$$\begin{aligned} \delta\varepsilon &= \frac{\partial\varepsilon}{\partial l} \delta l = \frac{l}{l_0^2} \delta l, \\ \delta l &= \frac{\partial l}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial l}{\partial v_i} \delta v_i + \frac{\partial l}{\partial u_j} \delta u_j + \frac{\partial l}{\partial v_j} \delta v_j = \left[-\frac{l_0 + u_j - u_i}{l} \quad -\frac{v_j - v_i}{l} \quad \frac{l_0 + u_j - u_i}{l} \quad \frac{v_j - v_i}{l} \right] \delta \mathbf{d} \end{aligned}$$

であるので、仮想歪は次式で表せる。

$$\delta\varepsilon = \frac{l}{l_0^2} \left[-\mathbf{t}^T \quad \mathbf{t}^T \right] \delta \mathbf{d} \quad (2.3.4)$$

ここに、 $\mathbf{t} = \left[\frac{l_0 + u_j - u_i}{l} \quad \frac{v_j - v_i}{l} \right]^T = [\cos R \quad \sin R]^T$ は変形後の部材の傾きを表す方向余弦ベクトルである（ R は部材角を表す（図 2.3.1））。

部材の軸力は次式で表せる。

$$N = EA\varepsilon = EA \frac{l^2 - l_0^2}{2l_0^2} \quad (2.3.5)$$

仮想仕事の原理により

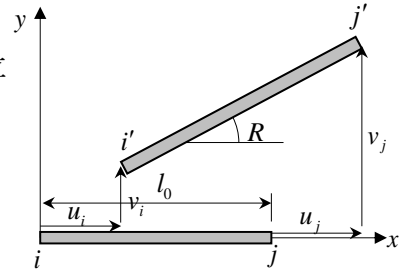


図 2.3.1 トラス要素の変位

$$\begin{aligned}\delta U - \delta W &= \int_0^{l_0} N \delta \varepsilon dx - \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f} = 0 \\ &= \int_0^{l_0} \left(\delta \mathbf{d}^T \begin{Bmatrix} -\mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} \frac{l}{l_0^2} \right) N dx - \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f} = \delta \mathbf{d}^T \left(\begin{Bmatrix} -\mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} \frac{l}{l_0} N - \mathbf{f} \right) = 0\end{aligned}\quad (2.3.6)$$

$\delta \mathbf{d}$ が任意であることから、釣合式は次式で表せる。

$$\begin{Bmatrix} -\mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} \frac{l}{l_0} N - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.3.7)$$

あるいは、 $\mathbf{t}_g = \frac{l}{l_0} \mathbf{t} = \begin{bmatrix} l_0 + u_j - u_i & v_j - v_i \\ l_0 & l_0 \end{bmatrix}^T$ と置いて、

$$\begin{Bmatrix} -\mathbf{t}_g \\ \mathbf{t}_g \end{Bmatrix} N - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.3.8)$$

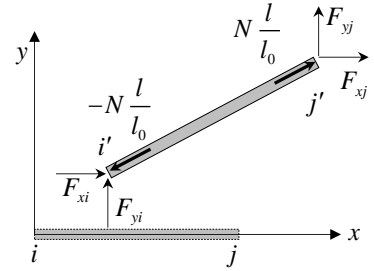


図 2.3.2 力の釣合

と表せる。(2.3.8)式の釣合式を見ると、 \mathbf{t}_g は変形後の部材の正確な傾きではない為、軸力 N は変形後の材軸方向の軸力を直接には表していないことが分かる。一方で、仮に $N \cdot l / l_0$ を変形後の軸力と見なせば、(2.3.7)式は変形後の正確な釣合を表すことが分かる (図 2.3.2)。(2.3.5)式のようにグリーン歪に構成則を適用して得られる応力は第 2 種ピオラ・キルヒホッフ応力と呼ばれ、変形後の部材軸に沿った応力とするには厳密には変換が必要になる。しかし、建築の構造物ではゴムのような柔軟な材料は扱われずに剛性の大きな材料が用いられる為に、両者の応力の差は実用上問題になる事は少ない。この為、あまり意識されずにこの応力をそのまま変形後の部材応力としていることが多い。

(2.3.8)式の釣合式は \mathbf{t}_g, N ともに \mathbf{d} の関数であり、非線形な釣合式となっている。増分解析を行う為に、増分形の釣合式を導出する。(2.3.8)式の \mathbf{d} と \mathbf{f} に関する項を増分で表すと、

$$\begin{Bmatrix} -\mathbf{t}_g \\ \mathbf{t}_g \end{Bmatrix} \Delta N + \begin{Bmatrix} -\Delta \mathbf{t}_g \\ \Delta \mathbf{t}_g \end{Bmatrix} N - \Delta \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.3.9)$$

ここで、

$$\begin{aligned}\Delta N &= EA \Delta \varepsilon = \frac{EA}{l_0} \begin{bmatrix} -\mathbf{t}_g^T & \mathbf{t}_g^T \end{bmatrix} \Delta \mathbf{d} \\ \Delta \mathbf{t}_g &= \frac{1}{l_0} \begin{Bmatrix} \Delta u_j - \Delta u_i \\ \Delta v_j - \Delta v_i \end{Bmatrix} = \frac{1}{l_0} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta \mathbf{d} = \frac{1}{l_0} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{d}\end{aligned}$$

である。ここに、 \mathbf{I} は 2×2 の単位マトリクスである。従って、最終的に増分形の釣合式は次式で表せる。

$$\left[\frac{EA}{l_0} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_g \mathbf{t}_g^T & -\mathbf{t}_g \mathbf{t}_g^T \\ -\mathbf{t}_g \mathbf{t}_g^T & \mathbf{t}_g \mathbf{t}_g^T \end{bmatrix} + \frac{N}{l_0} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right] \Delta \mathbf{d} - \Delta \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{d} - \Delta \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.3.10)$$

\mathbf{K}_T は接線剛性マトリクスと呼ばれる。 \mathbf{K}_T の第 2 項 $\mathbf{K}_G = \frac{N}{l_0} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$ は軸力 N を生じている部材の傾きの変化 $\Delta \mathbf{t}_g$ によって生じた項であり、幾何剛性マトリクスと呼ばれる。

2.4 移動座標を用いたトラス要素の釣合式

変形とともに移動する要素座標を設ける。変形後の座標を \tilde{x}, \tilde{y} 座標とし、図 2.4.1 に示すように変形後の部材 $i'j'$ の材軸方向に \tilde{x} 軸が沿うものとする。

変形後の部材の伸び u_e は次式で表せる。

$$u_e = l - l_0 \quad (2.4.1)$$

ここに $l = \sqrt{(l_0 + u_j - u_i)^2 + (v_j - v_i)^2}$ である。部材の \tilde{x} 座標

上の任意位置 \tilde{x} における材軸方向変位 \tilde{u} を次式のように u_e を用いて一次関数で表す。

$$\tilde{u} = \xi u_e \quad (2.4.2)$$

ここに $\xi = \tilde{x}/l_0$ である。歪に工学歪を適用すると、次式で表せる。

$$\varepsilon = \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}} = \frac{u_e}{l_0} \quad (2.4.3)$$

仮想歪 $\delta\varepsilon$ は次式で表せる (δl の計算は 2.3 節と同じ)。

$$\delta\varepsilon = \frac{\delta u_e}{l_0} = \frac{\delta l}{l_0} = \frac{1}{l_0} \begin{bmatrix} -\mathbf{t}^T & \mathbf{t}^T \end{bmatrix} \delta \mathbf{d} \quad (2.4.4)$$

部材の軸力は次式で表せる。

$$N = EA\varepsilon = EA \frac{u_e}{l_0} \quad (2.4.5)$$

仮想仕事の原理により、次式が得られる。

$$\delta U - \delta W = \int_0^{l_0} N \delta\varepsilon dx - \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f} = \int_0^{l_0} \delta \mathbf{d}^T \begin{Bmatrix} -\mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} \frac{1}{l_0} N dx - \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f} = \delta \mathbf{d}^T \left(\begin{Bmatrix} -\mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} N - \mathbf{f} \right) = 0 \quad (2.4.6)$$

$\delta \mathbf{d}$ が任意であることから、釣合式は次式で表せる。

$$\begin{Bmatrix} -\mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} N - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.4.7)$$

\mathbf{t} は変形後の部材の傾きを表す方向余弦ベクトルであるから、グリーン歪の場合と異なり、上式は変形後の材端力の釣合を正確に表していることが分かる (図 2.4.2)

次に増分形の釣合式を求める。 \mathbf{t}, N ともに \mathbf{d} の関数であるので、

$$\begin{Bmatrix} -\mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} \Delta N + \begin{Bmatrix} -\Delta \mathbf{t} \\ \Delta \mathbf{t} \end{Bmatrix} N - \Delta \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.4.8)$$

ここで、

$$\Delta N = EA \Delta\varepsilon = \frac{EA}{l_0} \begin{bmatrix} -\mathbf{t}^T & \mathbf{t}^T \end{bmatrix} \Delta \mathbf{d}$$

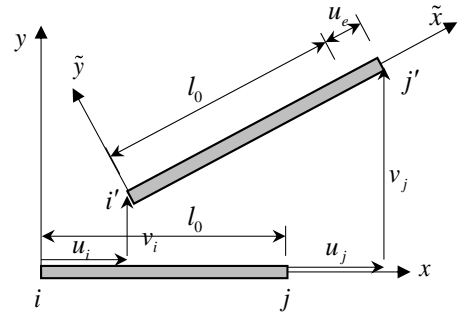


図 2.4.1 トラス要素の変位

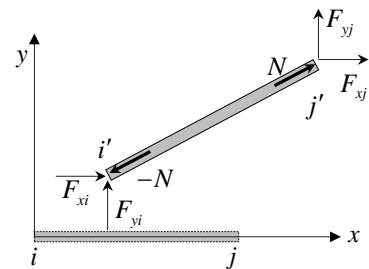


図 2.4.2 力の釣合

$$\begin{aligned}\mathbf{t} &= l^{-1} \begin{Bmatrix} l_0 + u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{Bmatrix} \\ \Delta \mathbf{t} &= -l^{-2} \cdot \Delta l \cdot \begin{Bmatrix} l_0 + u_j - u_i \\ v_j - v_i \end{Bmatrix} + l^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta u_j - \Delta u_i \\ \Delta v_j - \Delta v_i \end{Bmatrix} = -\frac{1}{l} \cdot \mathbf{t} \cdot \Delta l + \frac{1}{l} \begin{Bmatrix} \Delta u_j - \Delta u_i \\ \Delta v_j - \Delta v_i \end{Bmatrix} \\ &= -\frac{1}{l} \mathbf{t} \begin{bmatrix} -\mathbf{t}^T & \mathbf{t}^T \end{bmatrix} \Delta \mathbf{d} + \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{d} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -\mathbf{I} + \mathbf{t} \mathbf{t}^T & \mathbf{I} - \mathbf{t} \mathbf{t}^T \end{bmatrix} \Delta \mathbf{d}\end{aligned}$$

であるので、最終的に増分形の釣合式は次式で表せる。

$$\left[\frac{EA}{l_0} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \mathbf{t}^T & -\mathbf{t} \mathbf{t}^T \\ -\mathbf{t} \mathbf{t}^T & \mathbf{t} \mathbf{t}^T \end{bmatrix} + \frac{N}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{t} \mathbf{t}^T & -\mathbf{I} + \mathbf{t} \mathbf{t}^T \\ -\mathbf{I} + \mathbf{t} \mathbf{t}^T & \mathbf{I} - \mathbf{t} \mathbf{t}^T \end{bmatrix} \right] \Delta \mathbf{d} - \Delta \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.4.9)$$

上式の釣合式はこのままの表現でも構わないが、 $\frac{N}{l} = EA \frac{l-l_0}{ll_0} = EA \left(\frac{1}{l_0} - \frac{1}{l} \right)$ であることを利用すると更に簡潔に表現できる。即ち、

$$\left[\frac{EA}{l_0} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \mathbf{t}^T & -\mathbf{t} \mathbf{t}^T \\ -\mathbf{t} \mathbf{t}^T & \mathbf{t} \mathbf{t}^T \end{bmatrix} + \frac{N}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} + \left(\frac{EA}{l} - \frac{EA}{l_0} \right) \begin{bmatrix} -\mathbf{t} \mathbf{t}^T & \mathbf{t} \mathbf{t}^T \\ \mathbf{t} \mathbf{t}^T & -\mathbf{t} \mathbf{t}^T \end{bmatrix} \right] \Delta \mathbf{d} - \Delta \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

であるので、最終的に次式が得られる。

$$\left[\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \mathbf{t}^T & -\mathbf{t} \mathbf{t}^T \\ -\mathbf{t} \mathbf{t}^T & \mathbf{t} \mathbf{t}^T \end{bmatrix} + \frac{N}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right] \Delta \mathbf{d} - \Delta \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{K}_T \Delta \mathbf{d} - \Delta \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.4.10)$$

(2.3.10)式と非常によく似た釣合式が得られるが、式中の l_0 が全て変形後の長さ l に置き換わっている。 \mathbf{K}_T の第1項は軸剛性 EA/l を変形後の座標軸方向に座標変換した項であり、また第2項は幾何剛性を N/l として x,y 方向に一様に生じることを表した簡潔な表現となっている。

3 梁要素による幾何学的非線形解析

2次元の梁要素の定式化の例として、前節の移動座標により大変形を考慮する方法を示す。まず、前節同様、微小変形の仮定による釣合式を示したのちに、移動座標により大変形を考慮した釣合式を示す。先のトラスの定式化ではグリーン歪との比較を示す為に仮想仕事の原理によって釣合式を導出したが、ここではより簡単に直接剛性法によって釣合式を導出する。なお、梁要素の場合でもグリーン歪を用いた定式は可能である。グリーン歪を用いる場合の定式化については、例えば文献2),3)などを参照されたい。

3.1 微小変形を仮定した梁要素の釣合式

部材 ij が外力を受け図 3.1.1 のように $i'j'$ に変形したものとする。図中の \bar{x}, \bar{y} 座標系は全体座標系を表し、 x, y 座標系は x 座標が変形前の部材の材軸に沿うように設定した要素座標系である。

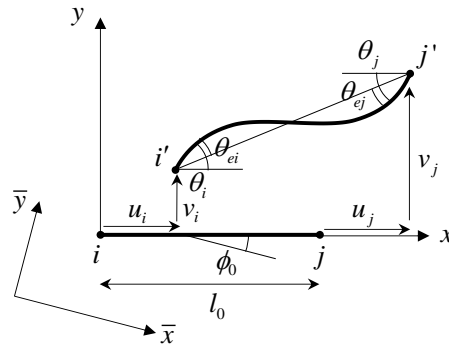


図 3.1.1 部材の変形

変形は微小であると仮定し、部材の伸び u_e は変形前の材軸方向で表す。また材端のたわみ角 θ_{ei}, θ_{ej} を次式のように節点の回転角 θ_i, θ_j から部材角 $(v_j - v_i)/l_0$ を除いて表現する。

$$u_e = u_j - u_i, \quad \theta_{ei} = \theta_i - \frac{v_j - v_i}{l_0}, \quad \theta_{ej} = \theta_j - \frac{v_j - v_i}{l_0} \quad (3.1.1)$$

軸力 N は工学歪による良く知られた軸剛性の式を、材端モーメント M_i, M_j はたわみ角法の基礎式を適用して次式で表す。

$$N = \frac{EA}{l_0} u_e, \quad M_i = \frac{2EI}{l_0} (2\theta_{ei} + \theta_{ej}), \quad M_j = \frac{2EI}{l_0} (\theta_{ei} + 2\theta_{ej}) \quad (3.1.2)$$

また、これをマトリクス表現すれば次式となる。

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_i \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l_0} & \frac{2EI}{l_0} \\ 0 & \frac{2EI}{l_0} & \frac{4EI}{l_0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_e \\ \theta_{ei} \\ \theta_{ej} \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{q}_e = \mathbf{K}_L \mathbf{d}_e \quad (3.1.3)$$

i 節点の要素座標系で表される節点変位 u_i, v_i, θ_i と、全体座標系で表される節点変位 $\bar{u}_i, \bar{v}_i, \bar{\theta}_i$ には

次の関係がある（図 3.1.2）。

$$u_i = \bar{u}_i \cos \phi_0 + \bar{v}_i \sin \phi_0, \quad v_i = -\bar{u}_i \sin \phi_0 + \bar{v}_i \cos \phi_0, \quad \theta_i = \bar{\theta}_i \quad (3.1.4)$$

j 節点でも同様の関係が成り立つ。これらの式を(3.1.1)式に代入して整理すると、次式の関係が得られる。

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ \theta_{ei} \\ \theta_{ej} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \phi_0 & -\sin \phi_0 & 0 & \cos \phi_0 & \sin \phi_0 & 0 \\ \frac{\sin \phi_0}{l_0} & \frac{\cos \phi_0}{l_0} & 1 & \frac{\sin \phi_0}{l_0} & -\frac{\cos \phi_0}{l_0} & 0 \\ -\frac{\sin \phi_0}{l_0} & \frac{\cos \phi_0}{l_0} & 0 & \frac{\sin \phi_0}{l_0} & -\frac{\cos \phi_0}{l_0} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{d}_e = \mathbf{T}_0 \bar{\mathbf{d}} \quad (3.1.5)$$

上式の \mathbf{T}_0 は全体座標系から要素座標系の節点変位に変換する座標変換マトリクスである。

i 節点に作用する節点外力 $\bar{F}_{xi}, \bar{F}_{yi}, \bar{M}_i$ と材端力の釣合は変形前の状態で考えると（図 3.1.3）、次式の関係が得られる。（図 3.1.3 中の外力モーメント \bar{M}_i, \bar{M}_j は省略して描いている。）

$$\begin{aligned} \bar{F}_{xi} &= -N \cos \phi_0 + Q \sin \phi_0 = -N \cos \phi_0 - \frac{M_i + M_j}{l_0} \sin \phi_0 \\ \bar{F}_{yi} &= -N \sin \phi_0 - Q \cos \phi_0 = -N \sin \phi_0 + \frac{M_i + M_j}{l_0} \cos \phi_0 \\ \bar{M}_i &= M_i \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

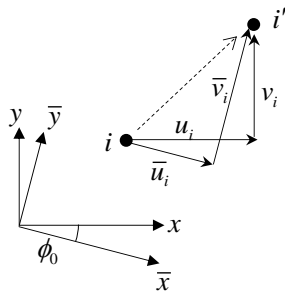


図 3.1.2 要素座標系と全体座標系の節点変位

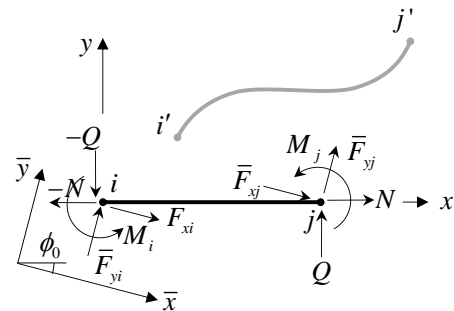


図 3.1.3 材端力と節点外力の釣合

j 節点についても同様の釣合を考えて、これらの釣合式をマトリクス表現すれば、次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \phi_0 & -\frac{\sin \phi_0}{l_0} & -\frac{\sin \phi_0}{l_0} \\ -\sin \phi_0 & \frac{\cos \phi_0}{l_0} & \frac{\cos \phi_0}{l_0} \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \phi_0 & \frac{\sin \phi_0}{l_0} & \frac{\sin \phi_0}{l_0} \\ \sin \phi_0 & -\frac{\cos \phi_0}{l_0} & -\frac{\cos \phi_0}{l_0} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M_i \\ M_j \end{Bmatrix} \quad (3.1.7)$$

上式の右辺のマトリクスは、(3.1.5)式の座標変換マトリクス \mathbf{T}_0 の転置マトリクスとなっていることが分かる。上式をあるいは次式のように表す。

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}_0^T \mathbf{q}_e$$

(3.1.3),(3.1.5),(3.1.7)式より、次式の釣合式が得られる。

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}_0^T \mathbf{K}_L \mathbf{T}_0 \bar{\mathbf{d}} \quad (3.1.8)$$

$\bar{\mathbf{K}}_L = \mathbf{T}_0^T \mathbf{K}_L \mathbf{T}_0$ は全体座標系で表された線形剛性マトリクスである。

3.2 移動座標を用いた梁要素の釣合式

部材 ij が外力を受け図 3.2.1 のように ij' に変形したものとする。図中の \bar{x}, \bar{y} 座標系は全体座標系を表し、 x, y 座標系は x 座標が変形前の部材の材軸に沿うように設定した要素座標系である。 \tilde{x}, \tilde{y} 座標系は \tilde{x} 座標が変形後の材端を結ぶ直線 ij' に沿うように設定した要素の移動座標系である。

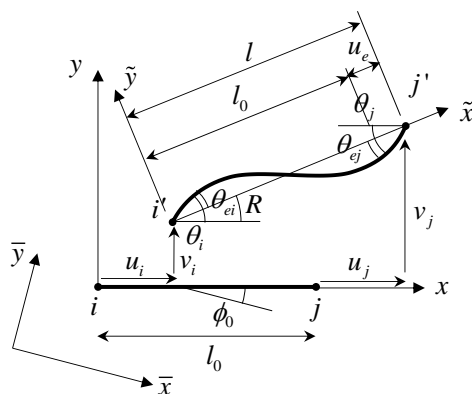


図 3.2.1 部材の変形

部材の伸び u_e は図 3.2.1 に示すように変形後の材端を結ぶ直線 ij' と変形前の直線 ij との差によって表す。また、材端たわみ角 θ_{ei}, θ_{ej} は、節点の回転角 θ_i, θ_j から部材角 R を微小変形の仮定を設けずに正確に除いて表現する。

$$u_e = l - l_0, \quad \theta_{ei} = \theta_i - R, \quad \theta_{ej} = \theta_j - R \quad (3.2.1)$$

$$\text{ここに、} \quad l = \sqrt{(l_0 + u_j - u_i)^2 + (v_j - v_i)^2} \quad R = \tan^{-1} \frac{v_j - v_i}{l_0 + u_j - u_i}$$

(3.2.1)式より、 $\mathbf{d}_e = [u_e, \theta_{ei}, \theta_{ej}]^T$ は、 $\mathbf{d} = [u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j]^T$ の非線形関数になっており、これを次のように表す。

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{H}(\mathbf{d}) \quad (3.2.2)$$

上式の増分形の関係を導く。

$$\Delta u_e = \Delta l = \frac{\partial l}{\partial u_i} \Delta u_i + \frac{\partial l}{\partial u_j} \Delta u_j + \frac{\partial l}{\partial v_i} \Delta v_i + \frac{\partial l}{\partial v_j} \Delta v_j = \frac{l_0 + u_j - u_i}{l} (\Delta u_j - \Delta u_i) + \frac{v_j - v_i}{l} (\Delta v_j - \Delta v_i)$$

$$\Delta \theta_{ei} = \Delta \theta_i - \Delta R, \quad \Delta \theta_{ej} = \Delta \theta_j - \Delta R$$

$$\Delta R = \frac{\partial R}{\partial u_i} \Delta u_i + \frac{\partial R}{\partial u_j} \Delta u_j + \frac{\partial R}{\partial v_i} \Delta v_i + \frac{\partial R}{\partial v_j} \Delta v_j = -\frac{v_j - v_i}{l^2} (\Delta u_j - \Delta u_i) + \frac{l_0 + u_j - u_i}{l^2} (\Delta v_j - \Delta v_i)$$

であり、更に、

$$\frac{l_0 + u_j - u_i}{l} = \cos R, \quad \frac{v_j - v_i}{l} = \sin R, \quad \Delta u_i = \Delta \bar{u}_i \cos \phi_0 + \Delta \bar{v}_i \sin \phi_0, \quad \Delta v_i = -\Delta \bar{u}_i \sin \phi_0 + \Delta \bar{v}_i \cos \phi_0$$

を代入して整理すると、次の関係式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_e \\ \Delta \theta_{ei} \\ \Delta \theta_{ej} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \phi & -\sin \phi & 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ \frac{\sin \phi}{l} & \frac{\cos \phi}{l} & 1 & \frac{\sin \phi}{l} & -\frac{\cos \phi}{l} & 0 \\ -\frac{\sin \phi}{l} & \frac{\cos \phi}{l} & 0 & \frac{\sin \phi}{l} & -\frac{\cos \phi}{l} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{u}_i \\ \Delta \bar{v}_i \\ \Delta \bar{\theta}_i \\ \Delta \bar{u}_j \\ \Delta \bar{v}_j \\ \Delta \bar{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \Delta \mathbf{d}_e = \mathbf{T} \Delta \bar{\mathbf{d}} \quad (3.2.3)$$

ただし、 $\phi = \phi_0 + R$ である。上式の \mathbf{T} は全体座標系から移動座標系に節点変位増分を変換する座標変換マトリクスとなっている。(3.1.5)式の \mathbf{T}_0 と比較すると、 ϕ_0 を ϕ に、 l_0 を l に置き換えた単純な式であり、式の意味が良くわかる。

大変形時の多くの変形成分が剛体変位であり、部材の弾性変形そのものは比較的小さく、微小変形の仮定が成り立つ場合がある。このような場合には、移動座標系における材端変位 $\mathbf{d}_e = [u_e, \theta_{ei}, \theta_{ej}]^T$ と材端力 $\mathbf{q}_e = [N, M_i, M_j]^T$ の関係は(3.1.3)式がそのまま利用できる。

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_i \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l_0} & \frac{2EI}{l_0} \\ 0 & \frac{2EI}{l_0} & \frac{4EI}{l_0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_e \\ \theta_{ei} \\ \theta_{ej} \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{q}_e = \mathbf{K}_L \mathbf{d}_e \quad (3.2.4)$$

次に i 節点に作用する節点外力 $\bar{F}_{xi}, \bar{F}_{yi}, \bar{M}_i$ と材端力の釣合についても、図3.2.2のようにより正確に変形後の状態で考え、次式の釣合式を得る。

$$\begin{aligned} \bar{F}_{xi} &= -N \cos \phi + Q \sin \phi = -N \cos \phi - \frac{M_i + M_j}{l} \sin \phi \\ \bar{F}_{yi} &= -N \sin \phi - Q \cos \phi = -N \sin \phi + \frac{M_i + M_j}{l} \cos \phi \\ \bar{M}_i &= M_i \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

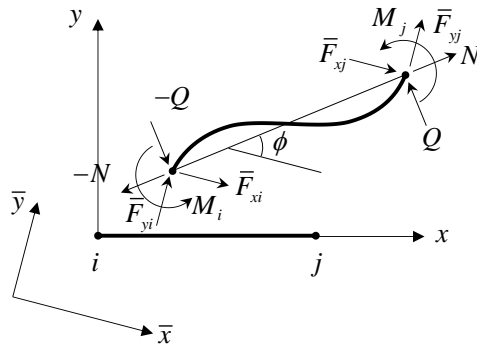


図 3.2.2 材端力と節点外力の釣合

j 節点についても同様の釣合を考え、これらの釣合式をマトリクス表現すれば、次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\phi & -\frac{\sin\phi}{l} & -\frac{\sin\phi}{l} \\ -\sin\phi & \frac{\cos\phi}{l} & \frac{\cos\phi}{l} \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\phi & \frac{\sin\phi}{l} & \frac{\sin\phi}{l} \\ \sin\phi & -\frac{\cos\phi}{l} & -\frac{\cos\phi}{l} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M_i \\ M_j \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \mathbf{q}_e \quad (3.2.6)$$

微小変形の場合と同様に、上式の右辺のマトリクスは、(3.2.3)式の座標変換マトリクス \mathbf{T} の転値マトリクスとなっていることが分かる。

(3.2.2), (3.2.4)式を(3.2.6)式に代入し、釣合式を全体座標系における節点変位ベクトル $\bar{\mathbf{d}}$ で表せば、次式となる。

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_L \mathbf{H}(\mathbf{d}) \quad (3.2.7)$$

上式の \mathbf{T}^T と $\mathbf{H}(\mathbf{d})$ は $\bar{\mathbf{d}}$ の非線形関数となっている (\mathbf{d} と $\bar{\mathbf{d}}$ の関係は(3.1.4)式である)。上式を $\bar{\mathbf{d}}$ について解くことで外力ベクトル $\bar{\mathbf{f}}$ 作用時の釣合状態が得られるが、非線形な関数であるため増分解析が必要になる。以下で増分形の釣合式を求める。

(3.2.6)式の増分を考えると、

$$\Delta \bar{\mathbf{f}} = \Delta \mathbf{T}^T \mathbf{q}_e + \mathbf{T}^T \Delta \mathbf{q}_e \quad (3.2.8)$$

ここで、上式の右辺第1項は、

$$\Delta \mathbf{T}^T \mathbf{q}_e = \begin{Bmatrix} -\Delta(\cos\phi) \cdot N - \Delta\left(\frac{\sin\phi}{l}\right) \cdot (M_i + M_j) \\ -\Delta(\sin\phi) \cdot N + \Delta\left(\frac{\cos\phi}{l}\right) \cdot (M_i + M_j) \\ 0 \\ \Delta(\cos\phi) \cdot N + \Delta\left(\frac{\sin\phi}{l}\right) \cdot (M_i + M_j) \\ \Delta(\sin\phi) \cdot N - \Delta\left(\frac{\cos\phi}{l}\right) \cdot (M_i + M_j) \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N \sin\phi \cdot \Delta R - (M_i + M_j) \left(-\frac{\sin\phi}{l^2} \Delta u_e + \frac{\cos\phi}{l} \Delta R \right) \\ -N \cos\phi \cdot \Delta R + (M_i + M_j) \left(-\frac{\cos\phi}{l^2} \Delta u_e - \frac{\sin\phi}{l} \Delta R \right) \\ 0 \\ -N \sin\phi \cdot \Delta R + (M_i + M_j) \left(-\frac{\sin\phi}{l^2} \Delta u_e + \frac{\cos\phi}{l} \Delta R \right) \\ N \cos\phi \cdot \Delta R - (M_i + M_j) \left(-\frac{\cos\phi}{l^2} \Delta u_e - \frac{\sin\phi}{l} \Delta R \right) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

であり、また、 $\Delta u_e = (\Delta \bar{u}_j - \Delta \bar{u}) \cos\phi + (\Delta \bar{v}_j - \Delta \bar{v}) \sin\phi$, $\Delta R = -(\Delta \bar{u}_j - \Delta \bar{u}) \frac{\sin\phi}{l} + (\Delta \bar{v}_j - \Delta \bar{v}) \frac{\cos\phi}{l}$

であるのでこれを代入し整理すると、次のように表せる。

$$\Delta \mathbf{T}^T \mathbf{q}_e = \bar{\mathbf{K}}_G \Delta \bar{\mathbf{d}} \quad (3.2.9)$$

ここに

$$\bar{\mathbf{K}}_G = \begin{bmatrix} a & b & 0 & -a & -b & 0 \\ & c & 0 & -b & -c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & a & b & 0 \\ sym & & & & c & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} a &= \frac{1}{l} (N \sin^2 \phi + 2Q \sin \phi \cos \phi) \\ b &= \frac{1}{l} \{-N \sin \phi \cos \phi + Q(\sin^2 \phi - \cos^2 \phi)\} \\ c &= \frac{1}{l} (N \cos^2 \phi - 2Q \sin \phi \cos \phi) \\ Q &= -\frac{M_i + M_j}{l} \end{aligned}$$

また(3.2.8)式の右辺第2項は、 $\mathbf{T}^T \Delta \mathbf{q}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_L \Delta \mathbf{d}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_L \mathbf{T} \Delta \bar{\mathbf{d}}$ であるので、結局、増分形の釣合式は次式のように表せる。

$$\Delta \bar{\mathbf{f}} = [\mathbf{T}^T \mathbf{K}_L \mathbf{T} + \bar{\mathbf{K}}_G] \Delta \bar{\mathbf{d}} \quad (3.2.10)$$

線形座屈解析では座屈前変形の影響を無視する為、次の固有値問題を解くことになる。

$$[\mathbf{T}_0^T \mathbf{K}_L \mathbf{T}_0 + \lambda_l \bar{\mathbf{K}}_{G_0}] \phi = \mathbf{0} \quad (3.2.11)$$

ここに、 $\bar{\mathbf{K}}_{G_0}$ は幾何剛性マトリクス $\bar{\mathbf{K}}_G$ の式中の l, ϕ を l_0, ϕ_0 とし、 N, M_i, M_j は線形解析により求められた値を用いる。

3.3 座屈たわみ角法と移動座標を用いた梁要素の釣合式

前節の定式化では変形から剛体変形を除き、また釣合式も変形後の釣合を考えることで、大変形を考慮した。しかし、(3.2.4)式で用いたたわみ角法の基礎式には微小変形の仮定が用いられている。この為、要素の弾性変形が微小で、変形成分の殆どが剛体変形となるように、十分な要素分割を行えば精度の良い解が得られるものの、例えば骨組の1部材を1要素として解析するには十分な精度が得られない。

釣合式の精度をより高くするために(3.2.4)式のたわみ角法の基礎式の代わりに、ここでは次の座屈たわみ角法の基礎式を用いる。座屈たわみ角法は変形後の梁の釣合を取ることで曲げ変形に軸力が与える影響が考慮されている。座屈たわみ角法の基礎式の導出については付録に示す。

$$N = \frac{EA}{l_0} u_e, \quad M_i = \frac{EI}{l_0} (s\theta_{ei} + sc\theta_{ej}), \quad M_j = \frac{EI}{l_0} (sc\theta_{ei} + s\theta_{ej}) \quad (3.3.1)$$

ここに、 s, c は安定関数と呼ばれ、次式で表される。

$$\begin{aligned} N < 0 \text{ の時} \quad s &= \frac{(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \alpha}{2(1 - \cos \alpha) - \alpha \sin \alpha}, \quad c = \frac{\alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha} \\ N = 0 \text{ の時} \quad s &= 4, \quad c = 0.5 \\ N > 0 \text{ の時} \quad s &= \frac{(\sinh \alpha - \alpha \cosh \alpha) \alpha}{2(\cosh \alpha - 1) - \alpha \sinh \alpha}, \quad c = \frac{\alpha - \sinh \alpha}{\sinh \alpha - \alpha \cosh \alpha} \end{aligned}$$

であり、 $\alpha = l_0 \sqrt{\frac{|N|}{EI}} = \pi \sqrt{\frac{|N|}{N_E}}$ 、 $N_E = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$ である。即ち、材端モーメント M_i, M_j は軸力 N を含む

形で表現されている。

(3.2.4)式は次式のように書き換えられる。

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_i \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{l_0}s & \frac{EI}{l_0}sc \\ 0 & \frac{EI}{l_0}sc & \frac{EI}{l_0}s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_e \\ \theta_{ei} \\ \theta_{ej} \end{Bmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \mathbf{q}_e = \mathbf{K}_N \mathbf{d}_e \quad (3.3.2)$$

(3.2.2), (3.2.6)式は同様の関係が成り立つため、次の釣合式が得られる。

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_N \mathbf{H}(\mathbf{d}) \quad (3.3.3)$$

\mathbf{K}_N の2行目,3行目の安定関数 s, c は N の関数であり、 N は1行目の関係 $N = EAu_e/l_0$ を満たす必要がある為、複雑な非線形方程式となっている。

\mathbf{K}_N は N の関数であり、 N は $\bar{\mathbf{d}}$ の関数であるから、上式の増分形の釣合式を求めるには、変位増分 $\Delta\bar{\mathbf{d}}$ による \mathbf{K}_N の増分 $\Delta\mathbf{K}_N$ を考える必要がある。しかし、座屈たわみ角法を用いた定式化では式が煩雑なる為この影響は小さいものとして無視し、 \mathbf{K}_N をそのまま接線剛性として扱うことが多い。従って、(3.2.10)式の \mathbf{K}_L をそのまま \mathbf{K}_N に置き換えることで、増分形の釣合式は次式となる。

$$\Delta\bar{\mathbf{f}} = [\mathbf{T}^T \mathbf{K}_N \mathbf{T} + \bar{\mathbf{K}}_G] \Delta\bar{\mathbf{d}} \quad (3.3.4)$$

厳密に $\Delta\mathbf{K}_N$ を考慮するために \mathbf{K}_N を $\bar{\mathbf{d}}$ で微分して得られる接線剛性は非対称マトリクスになる。一方で、Oran⁵⁾は、(3.3.1)式の軸力の釣合式の代わりに、梁のたわみ(反り)によって生じる材軸方向の縮み u_b を考慮して、次式のような釣合式を用いている。

$$N = \frac{EA}{l_0}(u_e - u_b), \quad \text{ここに、} \quad u_b = \frac{s(1+c)(sc-2)}{8\alpha^2} l_0 (\theta_{ei} + \theta_{ej})^2 + \frac{c}{8(1+c)} l_0 (\theta_{ei} - \theta_{ej})^2 \quad (3.3.5)$$

このより厳密な定式化では、接線剛性マトリクスは対称マトリクスとなるが、定式化はかなり煩雑になる。

次に線形座屈解析の方程式を導出する。 \mathbf{K}_N は N の非線形関数であるが、これを N について線形化することで \mathbf{K}_N に含まれる幾何剛性マトリクスを導出する。

安定関数 s, sc を N についてマクローリン展開すると

$$s = 4 + \frac{2l_0^2}{15EI} N - \frac{11l_0^4}{6300E^2I^2} N^2 + \dots, \quad sc = 2 - \frac{l_0^2}{30EI} N - \frac{13l_0^4}{12600E^2I^2} N^2 + \dots$$

N の1次の項まで採用すれば、

$$\mathbf{K}_N \approx \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l_0} & \frac{2EI}{l_0} \\ 0 & \frac{2EI}{l_0} & \frac{4EI}{l_0} \end{bmatrix} + N \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2l_0}{15} & -\frac{l_0}{30} \\ 0 & -\frac{l_0}{30} & \frac{2l_0}{15} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NG} \quad (3.3.6)$$

従って、接線剛性マトリクスは次式のように近似できる。

$$\mathbf{K}_T \approx \mathbf{T}^T \mathbf{K}_L \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{NG} \mathbf{T} + \bar{\mathbf{K}}_G \quad (3.3.7)$$

さらに座屈前変形の影響を無視することで、次の線形座屈解析の固有値問題が得られる。

$$\left[\mathbf{T}_0^T \mathbf{K}_L \mathbf{T}_0 + \lambda_1 \left(\mathbf{T}_0^T \mathbf{K}_{NG0} \mathbf{T}_0 + \bar{\mathbf{K}}_{G0} \right) \right] \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \quad (3.3.8)$$

ここに、 \mathbf{K}_{NG0} は \mathbf{K}_{NG} の式中の N に線形解析で求めた値を用いたマトリクスである。

3.4 数値解析例

3.2, 3.3 節で述べた梁要素を用いて、簡単な例題を解く。解析モデルは図 3.4.1 に示す 2 部材からなる剛接山形トラスである。部材は長さ 1m、変形前の部材の傾きは 30 度である。10 × 10mm の正方形断面とし、ヤング率 $E=2.05 \times 10^5 \text{N/mm}^2$ とする。

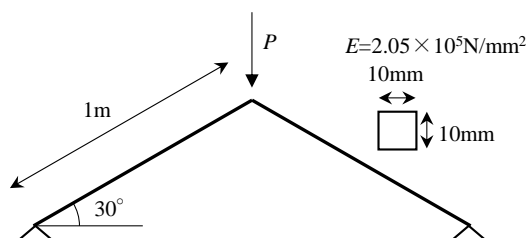


図 3.4.1 解析モデル 1

この解析モデルの座屈は頂点の接合部が回転することで、部材長さ 1m とする個材座屈が生じる。部材のオイラー座屈軸力は $N^E = \pi^2 EI / l_0^2 = 1.686 \text{ kN}$ であるので、鉛直方向の力の釣合から座屈荷重は $P^E = 2N^E \sin 30^\circ = 1.686 \text{ kN}$ と算定できる。

3.3 節で述べた移動座標と座屈たわみ角法を適用した場合（線形座屈解析(3.3.8)式、弾性座屈解析(3.3.3),(3.3.4)式）を解法 1、3.2 節で述べた移動座標のみ適用した場合（線形座屈解析(3.2.11)式、弾性座屈解析(3.2.7),(3.2.10)式）を解法 2 と呼ぶことし、これらの手法を用いてそれぞれ線形座屈解析と弾性座屈解析を行った。要素分割は 1 部材を 1 要素、2 要素、4 要素とした場合についてそれぞれ解析を行った。解析により得られた座屈荷重を表 3.4.1 に示す。

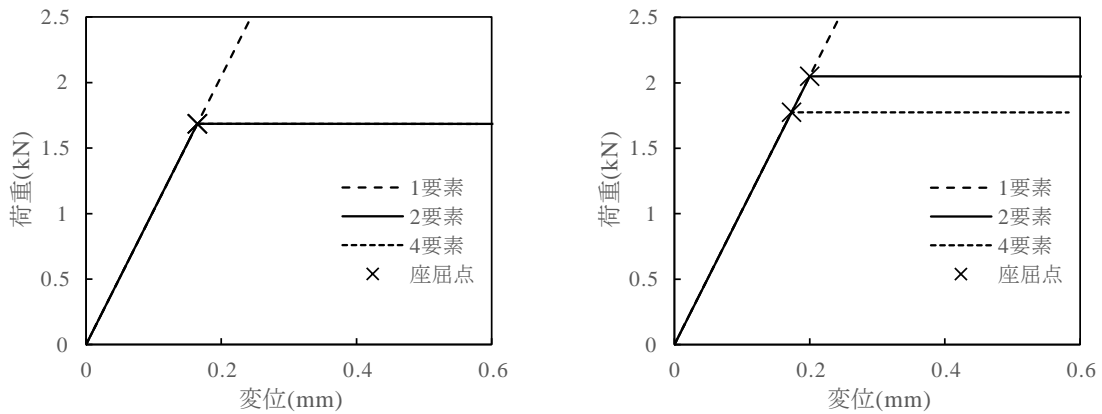
線形座屈解析の結果を見ると、解法 1 の線形座屈解析では 1 部材 1 要素の時の座屈荷重は 2.050kN であり、 P^E の 1.2 倍程度大きな値となった。座屈たわみ角法は 1 部材の座屈を表現可能であるが線形座屈解析では N に関して線形化した為に誤差が生じている。1 部材 2 要素の場合ではよい対応が見られる。解法 2 の線形座屈解析では 1 部材 1 要素では座屈を生じず、2 要素、4 要素と要素分割を増やすにつれ精度が上がっていくことが分かる。

解法 1 の弾性座屈解析により得られた荷重と頂点節点の鉛直変位の関係を図 3.4.2(a)に示す。図中の線種は要素分割数の違いを表しており、図中の×印は座屈点を示している。いずれ要素分割の場合も座屈荷重は 1.686kN であり、 P^E とよく一致する。ただし、1 部材 1 要素とした解析では釣合経路上で座屈点（接線剛性マトリクス固有値が 0 の釣合点）は見つけられるものの分岐経路を見つけることができなかった。次に、解法 2 の弾性座屈解析により得られた荷重と頂点節点の鉛直変位の関係を同様に図 3.4.2(b)に示す。1 要素では座屈を生じず、2 要素の場合でも座屈荷重は 2 割程度の誤差がある。

線形座屈解析、弾性座屈解析により得られた座屈モードの例を図 3.4.3 に示す。いずれの場合も頂点節点が回転し、座屈長さが部材長さとなる個材座屈を生じていることが分かる。

表 3.4.1 座屈解析結果 (解析モデル 1)

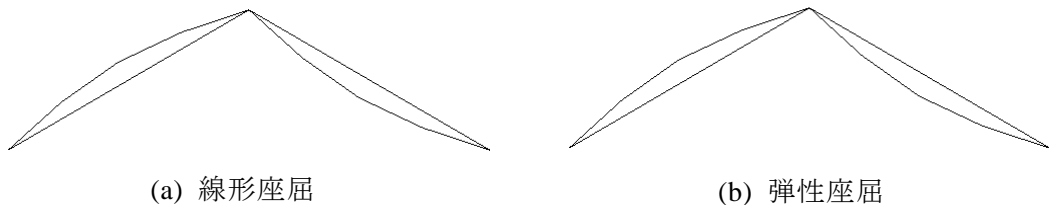
要素分割	線形座屈荷重 P_{cr}^{lin} (kN)		弾性座屈荷重 P_{cr}^{el} (kN)		オイラー座屈荷重 P^E (kN)
	解法1 (3.3.8)式	解法2 (3.2.11)式	解法1 (移動座標+ 座屈たわみ角法) (3.3.3),(3.3.4)式	解法2 (移動座標) (3.2.7),(3.2.10)式	
1要素	2.050	6835	1.686	-	1.686
2要素	1.699	2.050	1.686	2.050	
4要素	1.687	1.775	1.686	1.774	



(a) 解法 1 (移動座標+座屈たわみ角法)

(b) 解法 2 (移動座標)

図 3.4.2 荷重変位関係 (解析モデル 1)



(a) 線形座屈

(b) 弾性座屈

図 3.4.3 座屈モード (解析モデル 1, 解法 1, 4 要素)

次に図 3.4.1 の解析モデルの部材の傾きを 30 度から 1 度に変更して (図 3.4.4) 解析を行った。その他の条件は先と同様である。この場合、 $P^E = 2N^E \sin \rho = 0.058\text{t}$ となる。

解析に得られた座屈荷重の一覧を表 3.4.2 に示す。また、弾性座屈解析により得られた荷重と頂点鉛直変位の関係を図 3.4.5 に示す。線形座屈解析、弾性座屈解析により得られた座屈モードの例を図 3.4.6 に示す。

このモデルでは、線形座屈解析の座屈モードは部材の傾きを 30 度としたモデルと同じ個材座屈であるが (図 3.4.6(a))、弾性座屈解析では極限点型の座屈を生じており、異なる座屈モードとなっている (図 3.4.6(b))。弾性座屈荷重は P^E の 0.6 倍程度の小さな値をとっている。なお、要素分割数を増やしても線形座屈荷重が P^E と一致しないのは、解析モデルが極端に扁平である為に十分なトラス効果が得られず、部材に曲げを生じて軸力が $N = P/(2 \sin \rho)$ よりも

若干小さな値となる為である。

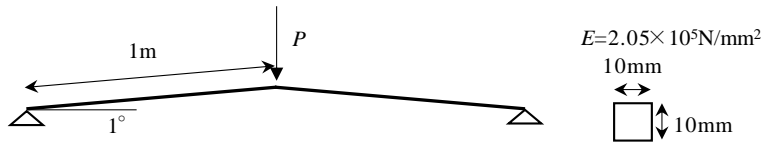
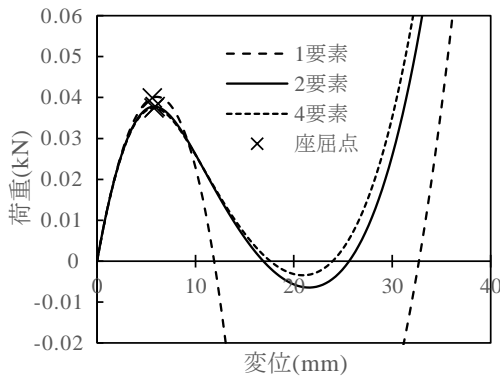


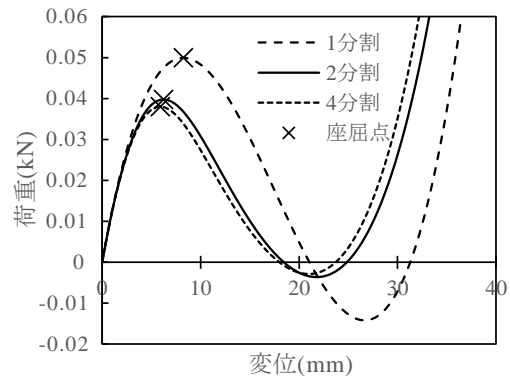
図 3.4.4 解析モデル 2

表 3.4.2 座屈解析結果 (解析モデル 2)

要素分割	線形座屈荷重 P_{cr}^{lin} (kN)		弾性座屈荷重 P_{cr}^e (kN)		オイラー座屈荷重 P^E (kN)
	解法1	解法2	解法1 (移動座標+座屈たわみ角法)	解法2 (移動座標)	
	(3.3.8式)	(3.2.11式)	(3.3.3),(3.3.4式)	(3.2.7),(3.2.10式)	
1要素	0.0774	0.255	0.0399	0.0499	0.0588
2要素	0.0642	0.0774	0.0378	0.0398	
4要素	0.0637	0.0670	0.0374	0.0380	



(a) 解法 1 (移動座標+座屈たわみ角法)

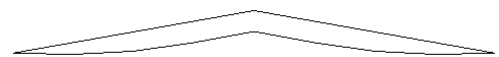


(b) 解法 2 (移動座標)

図 3.4.5 荷重変位関係 (解析モデル 1)



(a) 線形座屈



(b) 弾性座屈

図 3.4.6 座屈モード (解析モデル 2, 解法 1, 4 要素)

次に 4 部材からなるアーチ状骨組について解析を行う (解析モデル 3, 図 3.4.7)。部材長さは全て 1m であり、部材の傾きは支持部で 3 度、頂部で 1 度とした。荷重は全節点に同じ大きさで鉛直下向きに与える。その他の部材断面や支持条件はこれまでと同じである。

解法 1 の線形座屈解析、弾性座屈解析により得られた線形座屈荷重、弾性座屈荷重を表 3.4.3 に示す。1 部材を 1 要素、2 要素に要素分割した時の結果を示しており、荷重は 1 節点あたり

の荷重である。また、1 部材 1 要素とした時の弾性座屈解析により得られた荷重と頂点鉛直変位の関係を図 3.4.8 に示す。主経路と主経路上の分岐点から伸びる分岐経路をそれぞれ求めて実線で描いている。×印は座屈点である。また、同図中には線形座屈荷重の値も水平の点線で記入してある。また、線形座屈解析により得られた座屈モードの例を図 3.4.9 に示す。弾性座屈解析においてもほぼ同じ座屈モードであった。

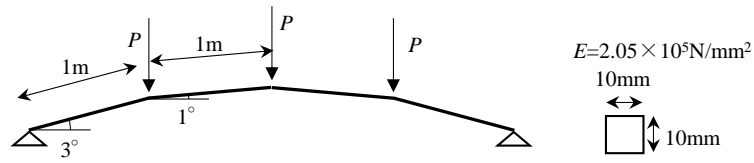


図 3.4.7 解析モデル 3

表 3.4.3 座屈解析結果 (解析モデル 3, 解法 1)

要素分割		線形座屈荷重 P_{cr}^{lin} (kN)	弾性座屈荷重 P_{cr}^{el} (kN)
1要素	分岐点(1次)	0.0149	0.0146
	極限点(2次)	0.0342	0.0312
2要素	分岐点(1次)	0.0148	0.0146
	極限点(2次)	0.0332	0.0311

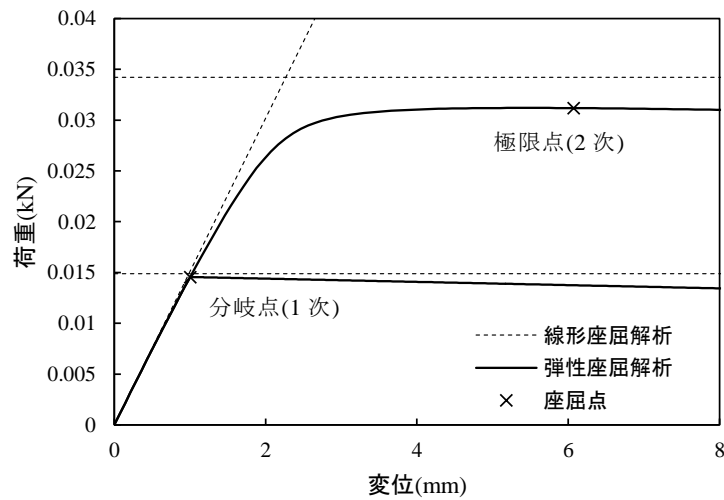


図 3.4.8 荷重変位関係 (解析モデル 3, 解法 1, 1 要素)

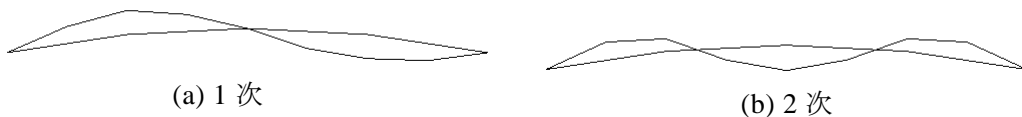


図 3.4.9 線形座屈モード (解析モデル 3, 解法 1, 2 要素)

4 おわりに

2次元のトラス要素と梁要素を例として、骨組構造の座屈解析法について説明した。ただし、弾塑性座屈解析の方法については説明しなかった。塑性ヒンジ法やファイバーモデルによる解析法があるが、これらの方法については他の文献^{例えば 1),4)}を参照されたい。

なお、本稿で説明した座屈解析についてより深く理解してもらう為に、3.3節で示した梁要素による線形座屈解析と弾性座屈解析のプログラムをエクセルのVBAで作成したマクロファイルを以下のURLに置いた。このマクロファイルを用いて3.4節の例題を解いてみるなどして、座屈解析の学習に利用していただければ幸いである。

Excelマクロファイルのダウンロード：<http://kyamamoto.html.xdomain.jp/seminar>

最後に補足としてラチスシェルの座屈解析を行う上での留意点について幾つか述べる。

複層ラチスシェルは個材座屈の可能性が高いのに対し、単層ラチスシェルは個材座屈、節点座屈、全体座屈など様々な座屈を生じる。従ってここで述べたような座屈解析は主に単層ラチスシェルに対して必要になる。単層ラチスシェルは、扁平なほど座屈荷重は小さくなり、また座屈前変形の影響が大きくなる為、線形座屈荷重と弾性座屈・弾塑性座屈荷重との差が大きくなる。

単層ラチスシェルの座屈挙動は接合部の剛性に大きな影響を受ける。この為、接合部を半剛接としてモデル化するなど適切なモデル化が必要になる。また、ラチスシェル屋根構造設計指針⁶⁾では接合部の剛性の影響を弾性座屈荷重の低減係数として評価する方法が示されており、既往の研究結果がまとめられている。

単層ラチスシェルの全体座屈は形状初期不整に大きな影響を受けることが良く知られている。初期不整の影響を解析によって把握する場合、初期不整の分布は線形座屈解析の座屈モードが用いられる⁶⁾。弾性座屈解析時に線形座屈解析の1次モード以外のモードが座屈モードとして現れることがある為、検討する初期不整の分布は線形座屈解析の複数の低次モードに対して行う必要がある。線形座屈解析の高次モードが初期不整によって大きく低下して弾性座屈に現れることもある。このような敏感な座屈モードはRS座屈解析⁷⁾を行うことで判断することができる。また、ラチスシェル屋根構造設計指針⁶⁾には代表的な幾何学形状のシェルに対して形状初期不整による弾性座屈荷重低減係数が示されている。

先の例題に見られるように部材を梁要素でモデル化する際に、グリーン歪や先の移動座標のみによる定式化など変位関数に3次関数を用いられた梁要素では、座屈波長が個材レベルとなる座屈に対して座屈荷重が大きく評価される傾向がある。この為、個材座屈を精度よく捉えるには1部材を複数要素に分割する必要がある。ただし、個材座屈は線形解析からある程度の予測が可能である為、座屈波長の長いシェル型の座屈に検討対象を限定するのであれば、1部材1要素として解析することができる。座屈たわみ角法に基づいた梁要素で弾性座屈解析をする際には、1部材1要素とすることができる。また、座屈たわみ角法に基づいた梁要素であっても、弾塑性座屈解析を行う際に部材内に塑性ヒンジができる可能性がある場

合には要素分割が必要になる。

参考文献

- 1) 日本建築学会編：空間構造の数値解析ガイドブック，日本建築学会，2017
- 2) 鷲津久一郎他：有限要素法ハンドブックII応用編，培風館，1983
- 3) 日本建築学会編：ラチスシエルの座屈と耐力，日本建築学会，2010
- 4) 佐藤稔夫，中村恒善：新建築学体系 36 骨組構造の解析，彰国社，1982
- 5) C. Oran: Tangent Stiffness in Plane Frames, Journal of the Structural Division, Vol. 99, No. 6, pp.973-985, 1973
- 6) 日本建築学会編：ラチスシエル屋根構造設計指針，日本建築学会，2016
- 7) 山田聖志，竹内明子，多田敬幸，堤和敏：汎用構造解析コードによる RS 解析法と単層ラチスドームの座屈問題への適用，日本建築学会構造系論文集，526, pp.85-92, 1999

付録 座屈たわみ角法の基礎式

座屈たわみ角法の基礎式の導出を示す。材端に曲げモーメント M_i, M_j と軸力 N を受ける単純支持された梁を考える（図 A.1）。梁の曲げ剛性は EI とし、材軸方向に x 座標を、直交方向を y 座標とする。材端のたわみ角を θ_i, θ_j とする。

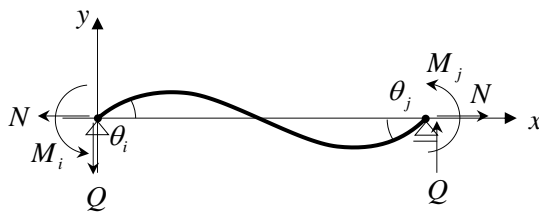


図 A.1 梁の変形と材端力

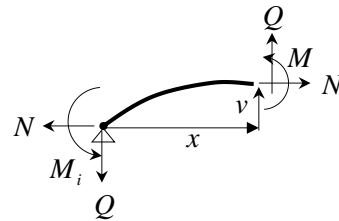


図 A.2 自由体の釣合

図 A.2 のように梁を任意の位置で切断し自由体のモーメントの釣合を考えると次式が得られる。

$$EI \frac{d^2v}{dx^2} = Nv - M_i - Qx \quad (\text{A.1})$$

せん断力 Q は図 A.1 のモーメントの釣合から次式のように表せる。

$$Q = -\frac{M_i + M_j}{l_0} \quad (\text{A.2})$$

(A.2)式を(A.1)式に代入すると次の微分方程式が得られる。

$$\frac{d^2v}{dx^2} - \left(\frac{\alpha^2}{l_0^2}\right)v = \frac{1}{EI} \left\{ (M_i + M_j) \frac{x}{l_0} - M_i \right\} \quad (\text{A.3})$$

ただし、 $N > 0$ であると仮定し、

$$\alpha = l_0 \sqrt{\frac{N}{EI}} = \pi \sqrt{\frac{N}{N_E}}, \quad N_E = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2} \quad (\text{A.4})$$

と置いている ($N < 0$ の場合は後述する)。

上式の一般解は次式で表せる。

$$v = A \sinh \frac{\alpha x}{l_0} + B \cosh \frac{\alpha x}{l_0} - \frac{l_0^2}{EI \alpha^2} \left\{ (M_i + M_j) \frac{x}{l_0} - M_i \right\} \quad (\text{A.5})$$

$x=0$ のとき $v=0$ 、 $x=l_0$ のとき $v=0$ であるので、これら二つの境界条件により、上式の A, B を求めると、

$$A = \frac{l_0^2}{EI \alpha^2 \sinh \alpha} (\cosh \alpha \cdot M_i + M_j) \quad B = -\frac{l_0^2}{EI \alpha^2} M_i \quad (\text{A.6})$$

したがって、たわみ v とその 1 階微分は次式で表せる。

$$v = \frac{l_0^2}{EI \alpha^2} \left\{ \left(\frac{\cosh \alpha}{\sinh \alpha} \sinh \frac{\alpha x}{l_0} - \cosh \frac{\alpha x}{l_0} - \frac{x}{l_0} + 1 \right) M_i + \left(\frac{1}{\sinh \alpha} \sinh \frac{\alpha x}{l_0} - \frac{x}{l_0} \right) M_j \right\} \quad (\text{A.7})$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{l_0}{EI \alpha^2} \left\{ \left(\frac{\alpha \cosh \alpha}{\sinh \alpha} \cosh \frac{\alpha x}{l_0} - \alpha \sinh \frac{\alpha x}{l_0} - 1 \right) M_i + \left(\frac{\alpha}{\sinh \alpha} \cosh \frac{\alpha x}{l_0} - 1 \right) M_j \right\}$$

また、 $x=0$ のとき $\frac{dv}{dx} = \theta_i$ 、 $x=l_0$ のとき $\frac{dv}{dx} = \theta_j$ であるので、以下の二つの式が得られる。

$$\frac{EI \alpha^2}{l_0} \theta_i = \left(\frac{\alpha \cosh \alpha}{\sinh \alpha} - 1 \right) M_i + \left(\frac{\alpha}{\sinh \alpha} - 1 \right) M_j, \quad \frac{EI \alpha^2}{l_0} \theta_j = \left(\frac{\alpha}{\sinh \alpha} - 1 \right) M_i + \left(\frac{\alpha \cosh \alpha}{\sinh \alpha} - 1 \right) M_j \quad (\text{A.8})$$

上式を M_i, M_j について解くと、次の座屈たわみ角法の基礎式が得られる。

$$M_i = \frac{EI}{l_0} (s\theta_i + sc\theta_j), \quad M_j = \frac{EI}{l_0} (sc\theta_i + s\theta_j) \quad (\text{A.9})$$

$$\text{ここに、} \quad s = \frac{(\sinh \alpha - \alpha \cosh \alpha) \alpha}{2(\cosh \alpha - 1) - \alpha \sinh \alpha}, \quad c = \frac{\alpha - \sinh \alpha}{\sinh \alpha - \alpha \cosh \alpha}$$

$N < 0$ の場合は、(A.3)式の代わりに次の微分方程式を解く。

$$\frac{d^2 v}{dx^2} + \left(\frac{\alpha^2}{l_0^2} \right) v = \frac{1}{EI} \left\{ (M_i + M_j) \frac{x}{l_0} - M_i \right\} \quad (\text{A.10})$$

ここに、

$$\alpha = l_0 \sqrt{\frac{-N}{EI}} = \pi \sqrt{\frac{-N}{N_E}}, \quad N_E = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

である。上式の微分方程式の一般解で表せる。

$$v = A \sin \frac{\alpha x}{l_0} + B \cos \frac{\alpha x}{l_0} + \frac{l_0^2}{EI \alpha^2} \left\{ (M_i + M_j) \frac{x}{l_0} - M_i \right\} \quad (\text{A.11})$$

以下、先と同様の手順によって、最終的に次の座屈たわみ角法の基礎式が得られる。

$$M_i = \frac{EI}{l_0} (s\theta_i + sc\theta_j), \quad M_j = \frac{EI}{l_0} (sc\theta_i + s\theta_j) \quad (\text{A.12})$$

$$\text{ここに、} \quad s = \frac{(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) \alpha}{2(1 - \cos \alpha) - \alpha \sin \alpha}, \quad c = \frac{\alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}$$