

座屈解析の基本

シェル・空間構造セミナー2018

東海大学 山本憲司

はじめに

1. 座屈解析の概要

線形座屈解析、非線形座屈解析(増分解析)
極限点、分岐点

2. トラス要素による幾何学的非線形解析

微小変形、グリーン歪、移動座標

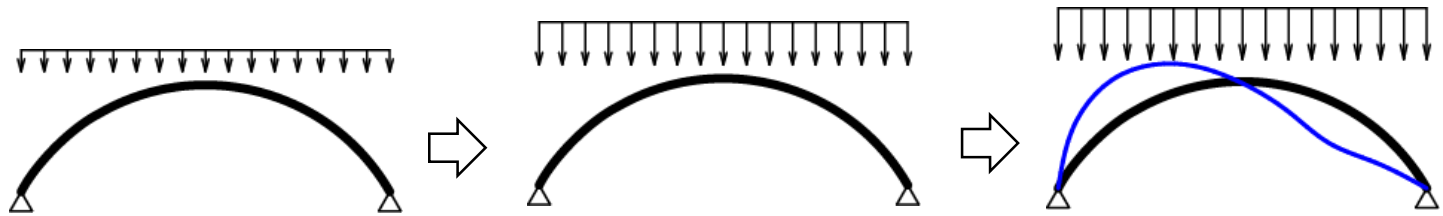
3. 梁要素による幾何学的非線形解析

移動座標と座屈たわみ角法による方法
簡単な数値解析例

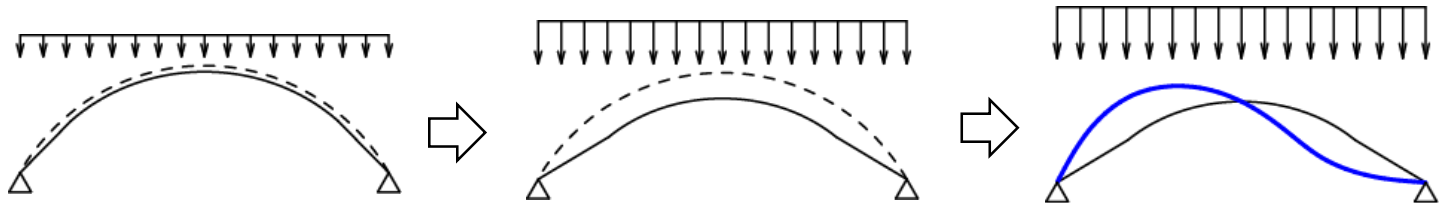
1. 座屈解析の概要

座屈解析の種類

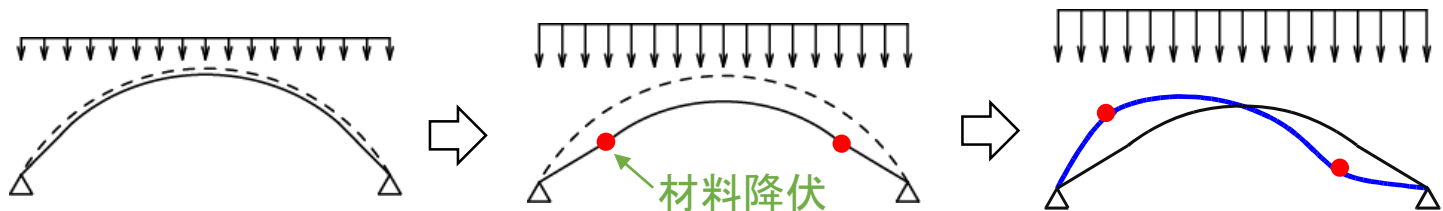
線形座屈解析 : 座屈前変形しないと仮定, 固有値解析



弾性座屈解析 : 座屈前変形を考慮, 増分解析



弾塑性座屈解析 : 座屈前変形と材料降伏を考慮, 増分解析



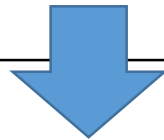
非線形座屈解析

線形応力解析の釣合式 $\mathbf{K}_L \mathbf{d} = \mathbf{f}$

\mathbf{K}_L : 線形剛性マトリクス \mathbf{d} : 節点変位ベクトル \mathbf{f} : 外力ベクトル

非線形座屈解析の釣合式 $\mathbf{q}(\mathbf{d}) = \lambda \mathbf{f}$

\mathbf{q} : 内力ベクトル λ : 荷重係数 \mathbf{f} : 外力モード



\mathbf{q} は \mathbf{d} の非線形関数であり、直接的に座屈時の釣合を求めるのは困難

荷重と変位がゼロの状態から荷重を変化させて釣合を求める増分解析が必要

増分形釣合式

$E(\mathbf{d}_0, \lambda_0)$ で釣合を満たしている

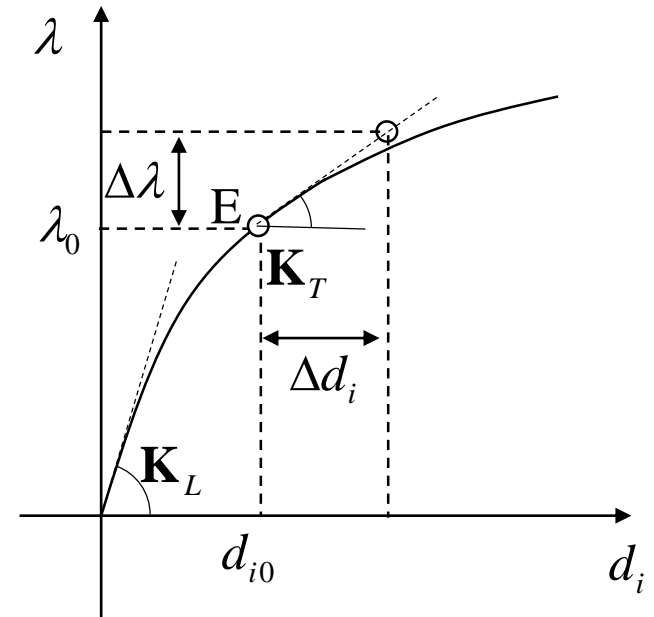
$$\mathbf{q}(\mathbf{d}_0) = \lambda_0 \mathbf{f}$$

少し先で釣合を満たす $\Delta \mathbf{d}, \Delta \lambda$ を求める

$$\mathbf{q}(\mathbf{d}_0 + \Delta \mathbf{d}) = (\lambda_0 + \Delta \lambda) \mathbf{f}$$

↓ テーラー展開の1次近似

$$\mathbf{q}(\mathbf{d}_0) + \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial d_1} & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial d_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial d_N} \end{bmatrix} \Delta \mathbf{d}$$



釣合曲線

増分形釣合式

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{d} = \Delta \lambda \mathbf{f}$$

接線剛性マトリクス

$$\mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial d_1} & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial d_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial d_N} \end{bmatrix}$$

増分形釣合式

荷重増分法

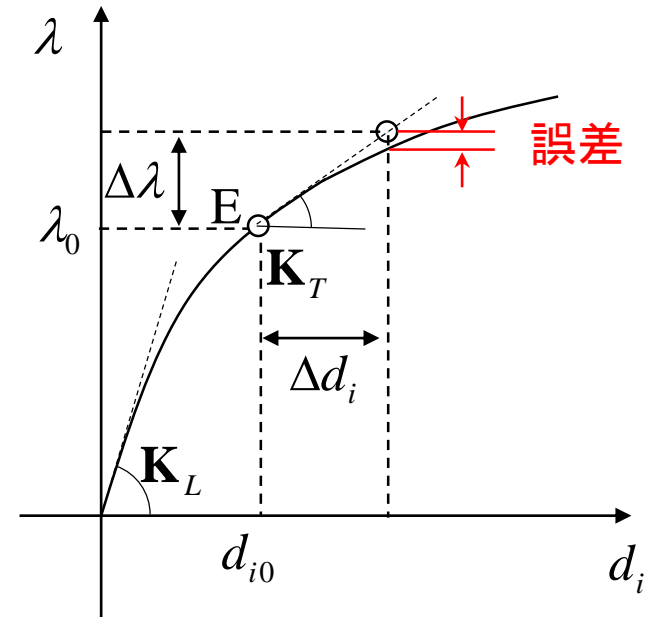
$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{d} = \Delta \lambda \mathbf{f}$$

未知 既知



実際には一次近似による誤差がある為、
ニュートンラプソン法による反復計算が行われる

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{d}^{(k+1)} = \underbrace{(\lambda_0 + \Delta \lambda) \mathbf{f} - \mathbf{q}(\mathbf{d}_0 + \Delta \mathbf{d}^{(1)} + \Delta \mathbf{d}^{(2)} + \dots + \Delta \mathbf{d}^{(k)})}_{\text{不釣合力}}$$



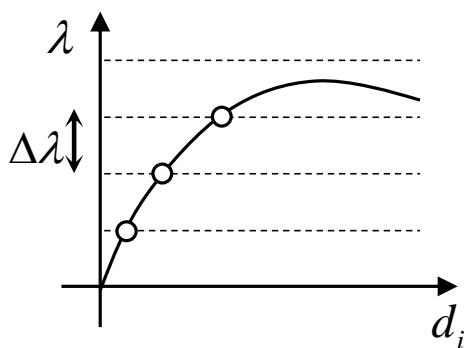
釣合曲線

増分解析の種類

荷重増分法

$$\mathbf{K}_T \underline{\Delta \mathbf{d}} = \underline{\Delta \lambda} \mathbf{f}$$

未知 既知

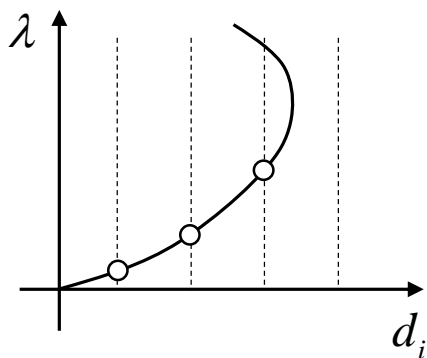


荷重増分法

変位増分法

$$\mathbf{K}_T \begin{Bmatrix} \Delta d_1 \\ \vdots \\ \Delta d_i \\ \vdots \\ \Delta d_N \end{Bmatrix} = \underline{\Delta \lambda} \mathbf{f}$$

既知 未知



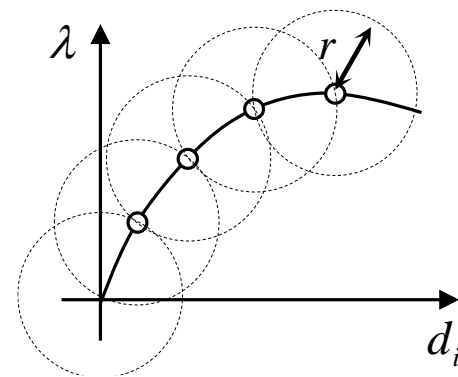
変位増分法

弧長増分法

$$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{d} = \Delta \lambda \mathbf{f}$$

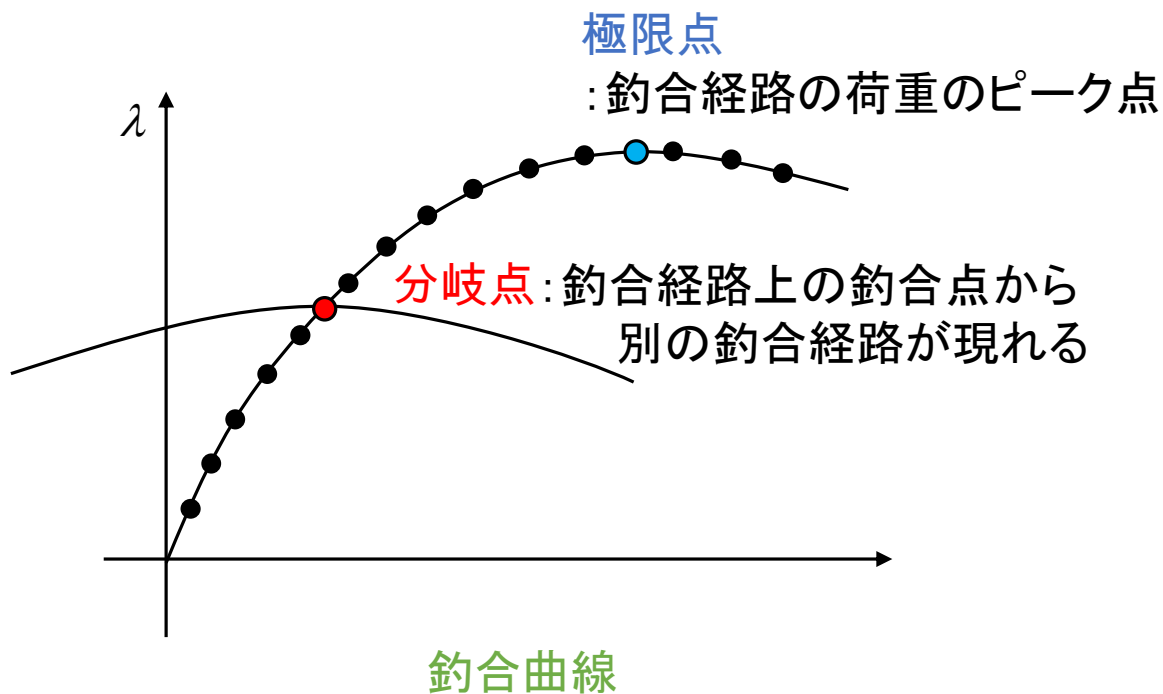
$$\Delta \mathbf{d}^T \Delta \mathbf{d} + \Delta \lambda^2 = \underline{r^2}$$

弧長パラメータ

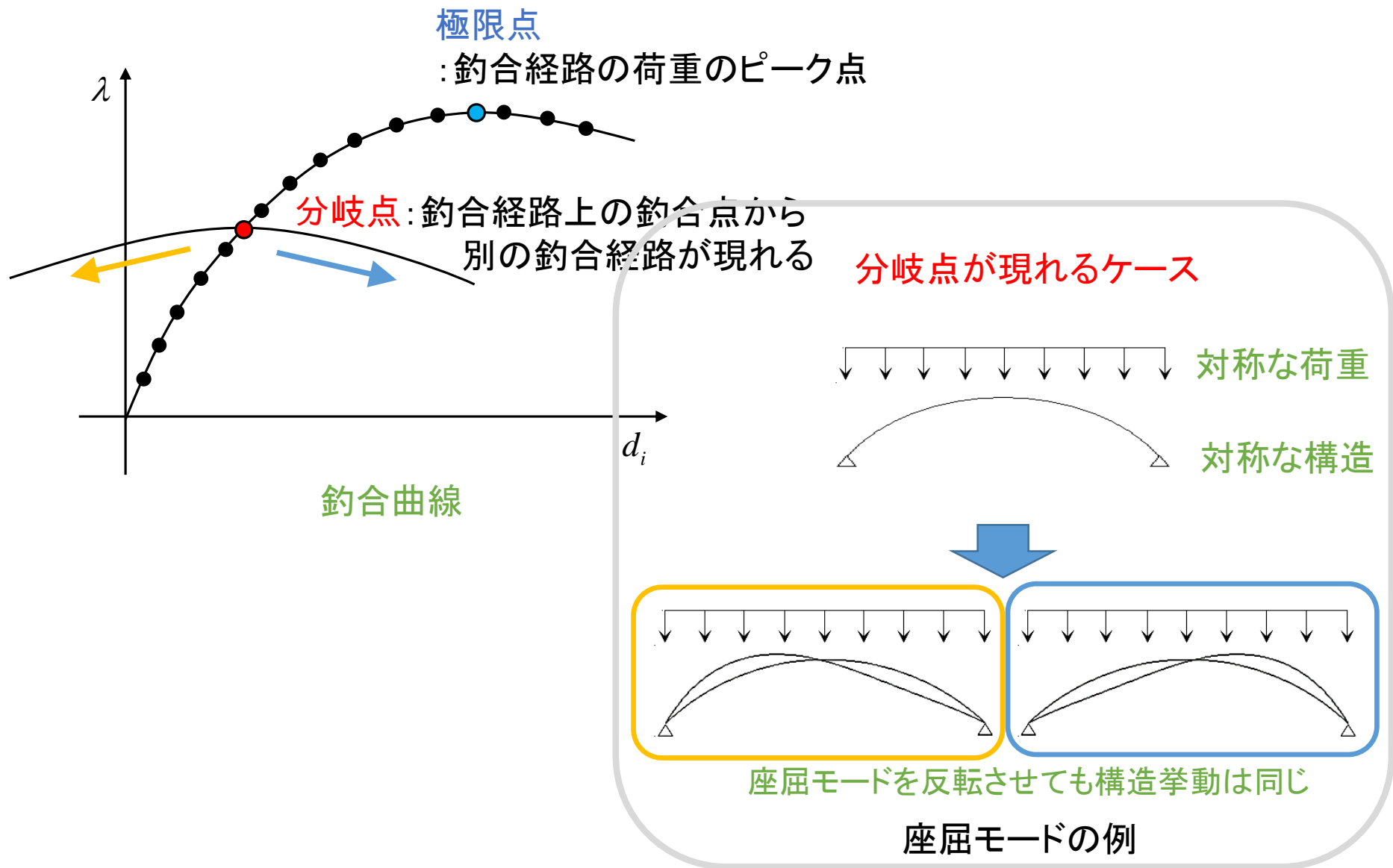


弧長増分法

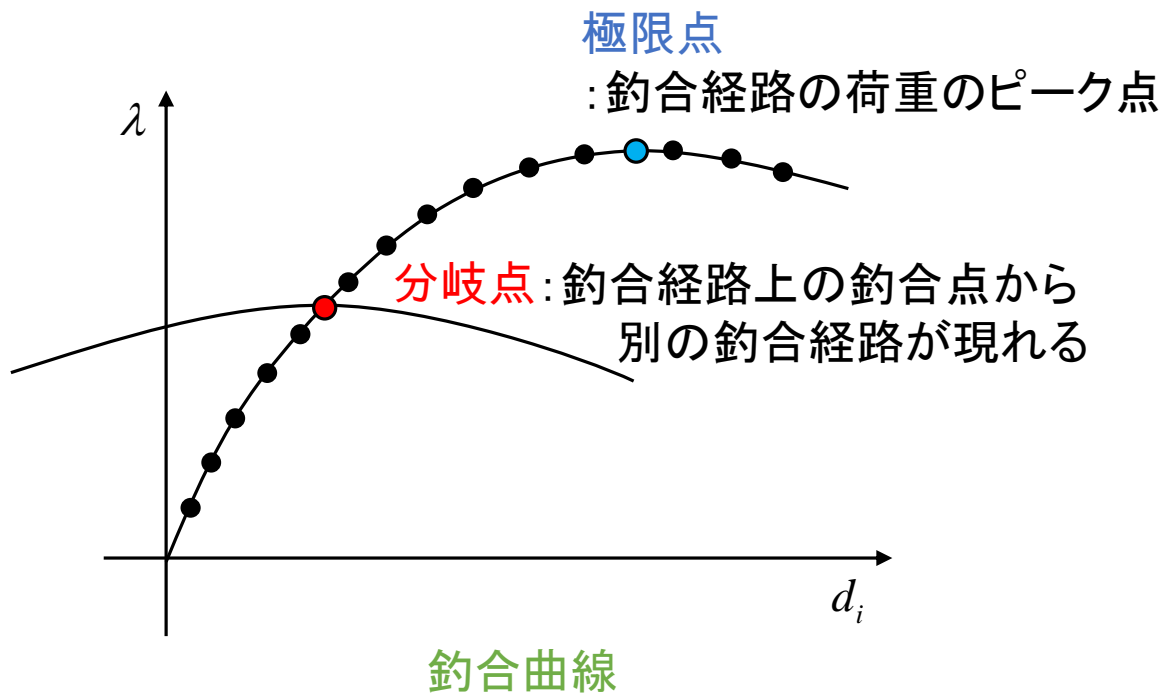
釣合経路上の座屈点



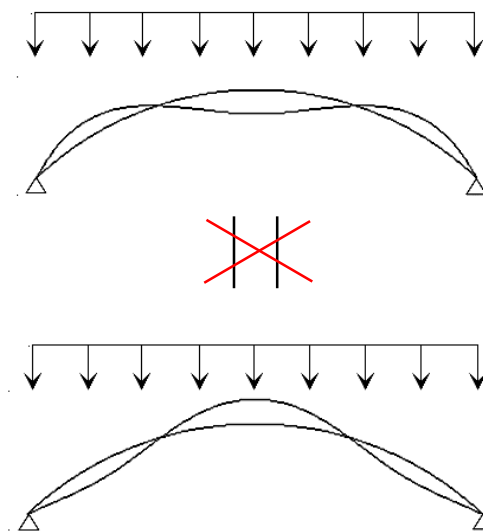
釣合経路上の座屈点



釣合経路上の座屈点

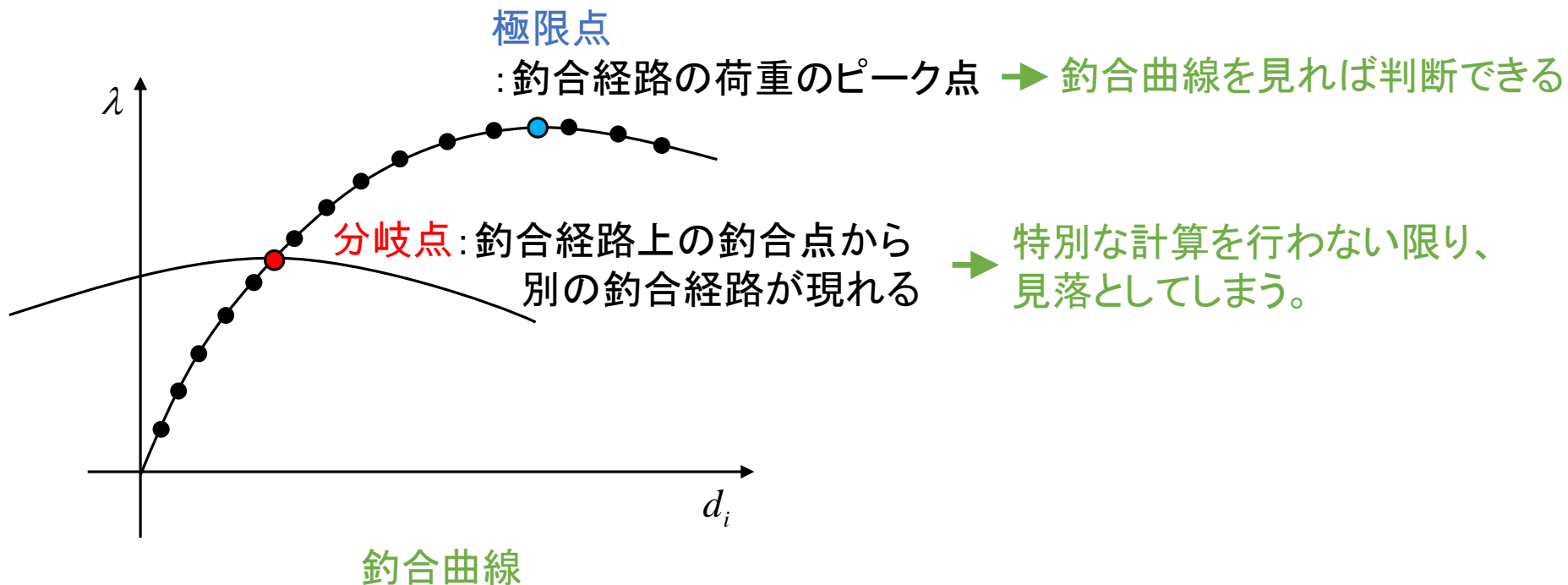


極限点の座屈モードの例



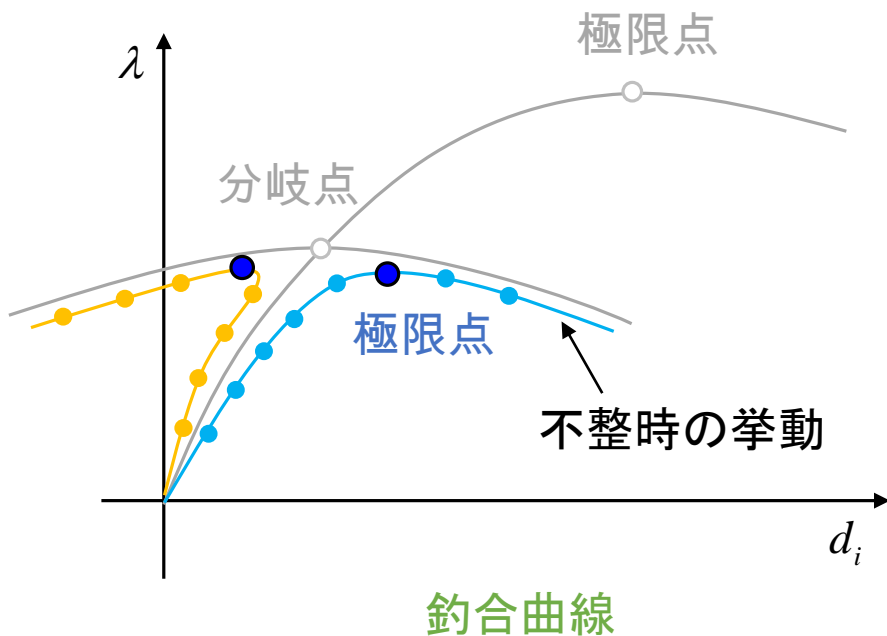
座屈モードを反転させると
構造挙動は同じにならない

釣合経路上の座屈点



1. 座屈解析の概要

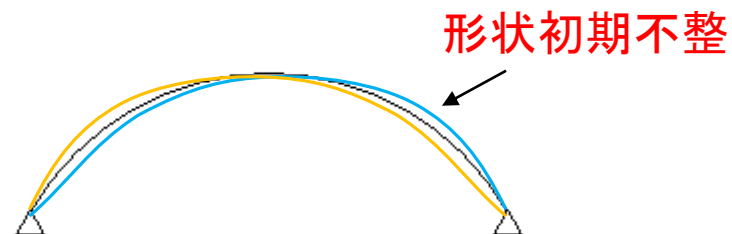
分岐点の座屈荷重の求め方



分岐点：荷重分布と構造形態が
同じ対称性を持つ場合



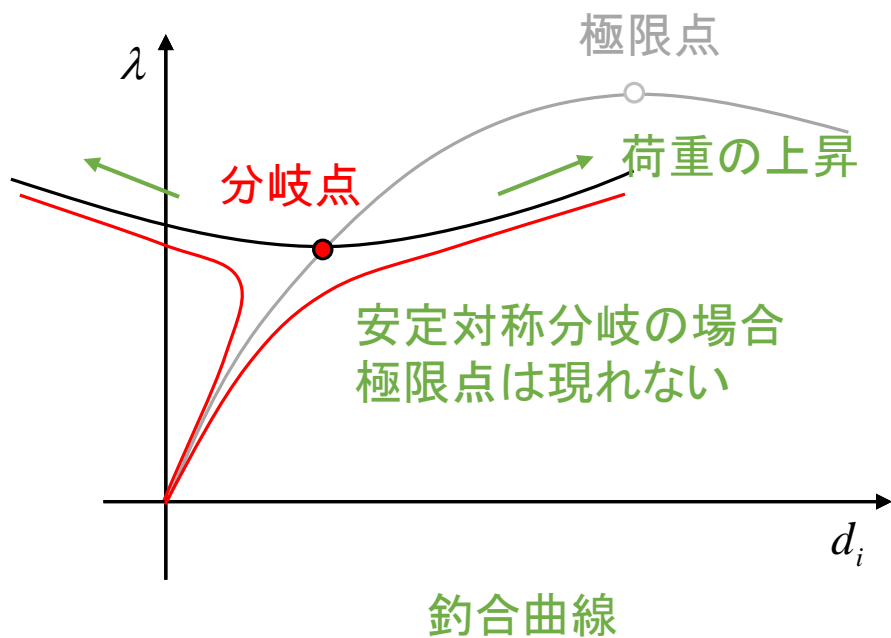
僅かな不整を与えて対称性を崩しておく。



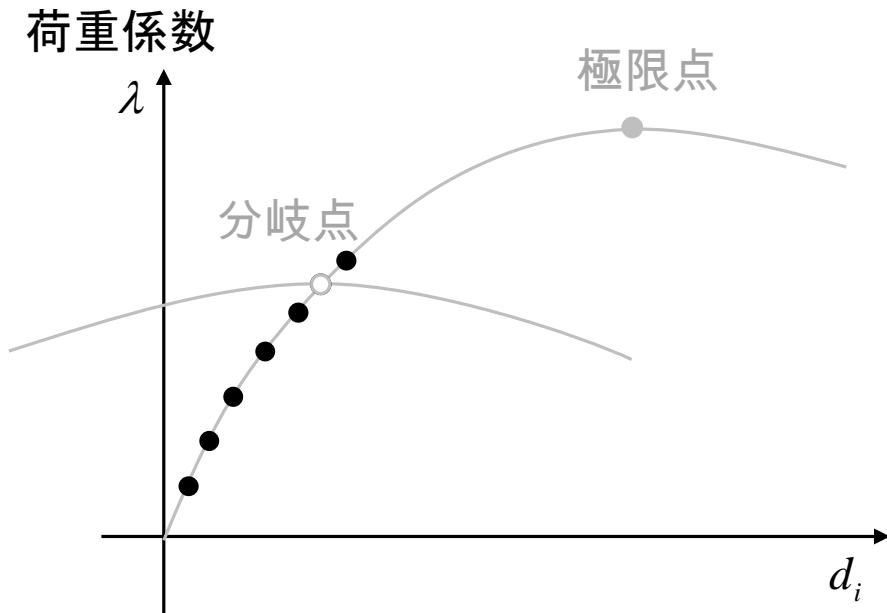
極限点型の座屈に変化する

1. 座屈解析の概要

分岐点の座屈荷重の求め方



分岐点の座屈荷重の求め方 その2



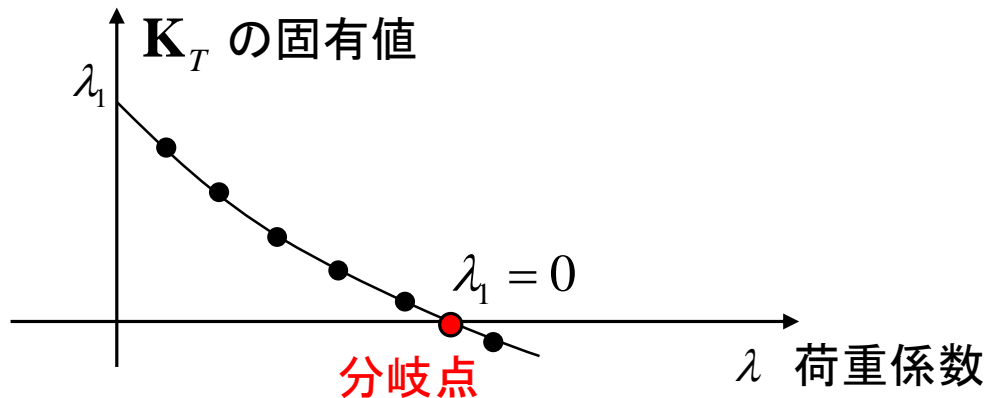
釣合点で次の固有値解析を行う。

$$\mathbf{K}_T \phi_i = \lambda_i \phi_i$$

\mathbf{K}_T : 接線剛性マトリクス

λ_i : i 次の固有値

ϕ_i : i 次の固有モード



座屈点では $\lambda_i = 0$ となる。

$$\mathbf{K}_T \phi_i = \mathbf{0}$$

ϕ_i : 座屈モード

線形座屈解析

接線剛性マトリクス

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_D(\mathbf{d}) + \mathbf{K}_G(\mathbf{q})$$

線形剛性マトリクス

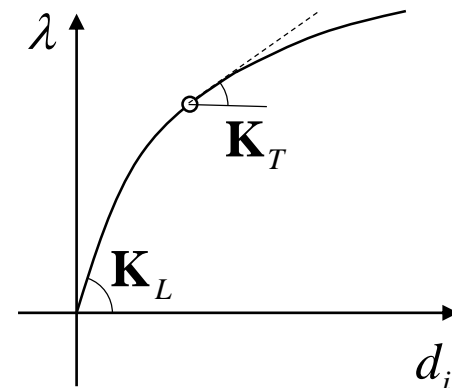
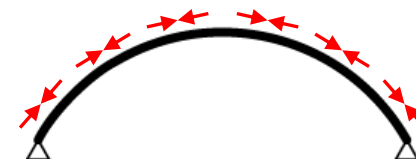
変形前の剛性

初期変位剛性マトリクス

変形(形が変わること)による
剛性変化

幾何剛性マトリクス

内部応力による剛性



定式化によっては次のような表現となる場合もある。

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_{L+D}(\mathbf{d}) + \mathbf{K}_G(\mathbf{q}, \mathbf{d})$$

線形+初期変位剛性マトリクス

幾何剛性マトリクス

線形座屈解析

接線剛性マトリクス

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_D(\mathbf{d}) + \mathbf{K}_G(\mathbf{q})$$

座屈前変形を無視 $\mathbf{0}$

応力は線形解析を使用 $\mathbf{K}_G(\lambda \mathbf{q}_0)$

$$\mathbf{K}_T \approx \mathbf{K}_L + \lambda \mathbf{K}_G(\mathbf{q}_0)$$

座屈点では特異(固有値ゼロ)

線形解析による内カベクトル

線形解析

$$\mathbf{K}_L \mathbf{d}_0 = \mathbf{f}$$

内カベクトル

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{K}_L \mathbf{d}_0$$

線形座屈解析

$$[\mathbf{K}_L + \lambda_i \mathbf{K}_G(\mathbf{q}_0)] \phi_i = \mathbf{0}$$

λ_i : 座屈荷重係数

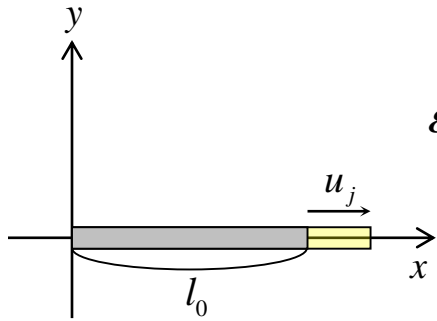
ϕ_i : 座屈モード

2. トラス要素による幾何学的非線形解析

大変形を考慮し**変形後の釣合**を求めることで座屈解析が可能になる。

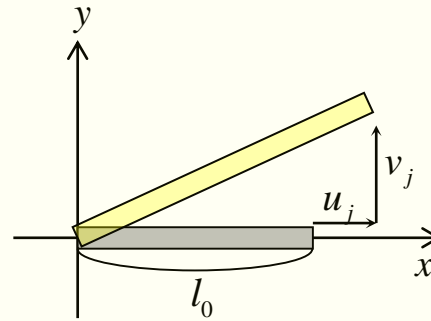
座屈解析によく用いられる**グリーン歪**、**移動座標**を用いて**仮想仕事の原理**により導出された釣合式が、**変形後の釣合式**になっていることを確認する。

2. トラス要素による幾何学的非線形解析



$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{u_j}{l_0}$$

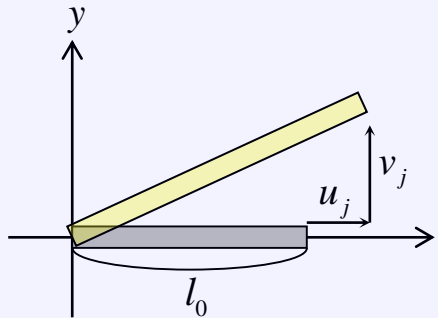
(a) 工学歪



$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{u_j}{l_0}$$

(v_j の影響を無視)

(b) 工学歪・微小変形



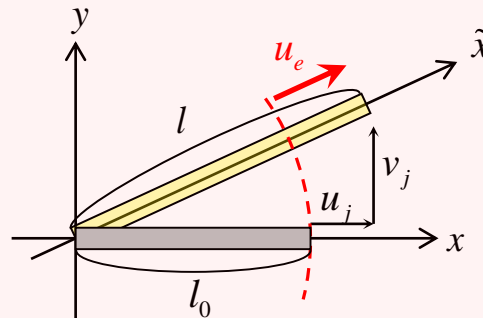
剛体変形の
影響を受けない
節点変位の
多項式で表せる

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right\}$$

グリーン歪

$$= \frac{u_j}{l_0} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{u_j}{l_0} \right)^2 + \left(\frac{v_j}{l_0} \right)^2 \right\}$$

(c) グリーン歪・大変形



$$l = \sqrt{(l_0 + u_j)^2 + v_j^2}$$

$$\varepsilon = \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}} = \frac{u_e}{l_0} = \frac{l - l_0}{l_0}$$

マクローリン展開し
2次まで考慮すると

$$= \sqrt{\left(1 + \frac{u_j}{l_0} \right)^2 + \left(\frac{v_j}{l_0} \right)^2} - 1 \Rightarrow \varepsilon \approx \frac{u_j}{l_0} + \frac{1}{2} \left(\frac{v_j}{l_0} \right)^2$$

無理関数

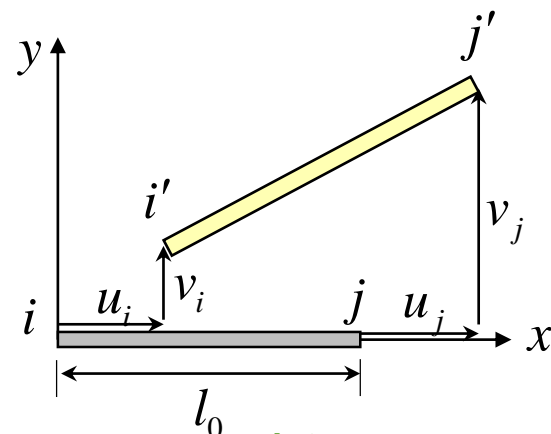
(d) 工学歪・大変形 (移動座標)

微小変形を仮定したトラス要素の釣合式

変位関数

$$u = (1 - \xi)u_i + \xi u_j \quad \xi = x/l_0$$

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix}$$



変位場

歪-節点変位関係

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{1}{l_0}(-u_i + u_j) = \frac{1}{l_0}[-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]\mathbf{d}$$

工学歪

$$\delta\varepsilon = \frac{1}{l_0}[-1 \quad 0 \quad 1 \quad 0]\delta\mathbf{d}$$

仮想仕事の原理

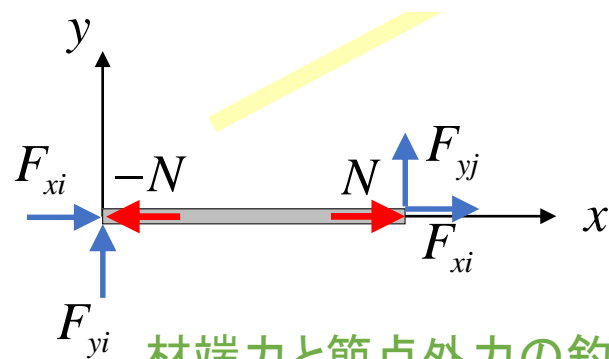
$$\delta U - \delta W = \int_0^{l_0} N \delta\varepsilon dx - \delta\mathbf{d}^T \mathbf{f} = \int_0^{l_0} \delta\mathbf{d}^T \begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \frac{1}{l_0} N dx - \delta\mathbf{d}^T \mathbf{f} = \delta\mathbf{d}^T \left(\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} N - \mathbf{f} \right) = 0$$

仮想変位は任意

釣合式

$$\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} N - \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

変形前の釣合



材端力と節点外力の釣合

グリーン歪を用いたトラス要素の釣合式

変位関数
$$u = (1-\xi)u_i + \xi u_j, \quad v = (1-\xi)v_i + \xi v_j$$

歪一節点変位

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right\}$$

グリーン歪

$$= \frac{u_j - u_i}{l_0} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{u_j - u_i}{l_0} \right)^2 + \left(\frac{v_j - v_i}{l_0} \right)^2 \right\}$$

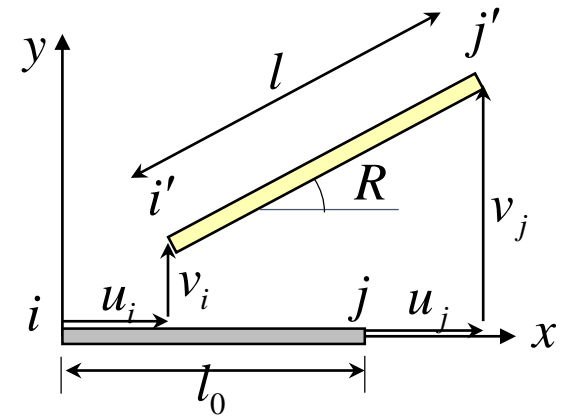
$$= \frac{\{l_0 + (u_j - u_i)\}^2 + (v_j - v_i)^2 - l_0^2}{2l_0^2} = \frac{l^2 - l_0^2}{2l_0^2}$$

仮想歪

$$\delta\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial u_i} \delta u_i + \frac{\partial\varepsilon}{\partial v_i} \delta v_i + \frac{\partial\varepsilon}{\partial u_j} \delta u_j + \frac{\partial\varepsilon}{\partial v_j} \delta v_j = \frac{l}{l_0^2} \begin{bmatrix} -\mathbf{t}^T & \mathbf{t}^T \end{bmatrix} \delta \mathbf{d}$$

$$\text{ここに} \quad \mathbf{t} = \begin{bmatrix} \frac{l_0 + u_j - u_i}{l} & \frac{v_j - v_i}{l} \end{bmatrix}^T = [\cos R \quad \sin R]^T$$

方向余弦ベクトル



変位場

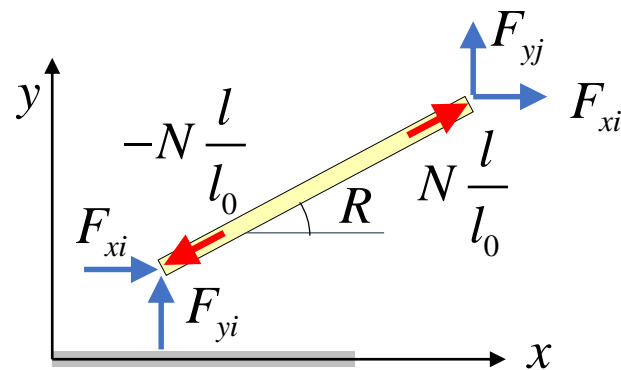
l : 変形後長さ l_0 : 変形前長さ

- ・剛体移動、剛体回転に影響を受けない
- ・節点変位の非線形関数

グリーン歪を用いたトラス要素の釣合式

仮想仕事の原理

$$\begin{aligned} \delta U - \delta W &= \int_0^{l_0} N \delta \varepsilon dx - \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f} = \int_0^{l_0} \left(\delta \mathbf{d}^T \begin{Bmatrix} -\mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} \frac{l}{l_0^2} \right) N dx - \delta \mathbf{d}^T \mathbf{f} \\ &= \delta \mathbf{d}^T \left(\begin{Bmatrix} -\mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} \frac{l}{l_0} N - \mathbf{f} \right) = 0 \end{aligned}$$



材端力と節点外力の釣合

釣合式

$$\begin{Bmatrix} -\mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} \frac{l}{l_0} N - \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

軸力と見なせば
正確な変形後の釣合式

方向余弦
ベクトル

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \frac{l_0 + u_j - u_i}{l} & \frac{v_j - v_i}{l} \end{bmatrix}^T = [\cos R \quad \sin R]^T$$

釣合式

$$\begin{Bmatrix} -\mathbf{t}_g \\ \mathbf{t}_g \end{Bmatrix} N - \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

方向余弦ベクトルの近似ベクトル

$$\mathbf{t}_g = \mathbf{t} \frac{l}{l_0} = \begin{bmatrix} \frac{l_0 + u_j - u_i}{l_0} & \frac{v_j - v_i}{l_0} \end{bmatrix}^T$$

移動座標を用いたトラス要素の釣合式

変位関数

$$\tilde{u} = \xi u_e \quad \xi = \tilde{x}/l_0 \quad u_e = l - l_0$$

歪一節点変位

変形後の材軸方向の変位

$$\varepsilon = \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{x}} = \frac{u_e}{l_0}$$

工学歪

仮想歪

$$\delta\varepsilon = \frac{\delta u_e}{l_0} = \frac{1}{l_0} \begin{bmatrix} -\mathbf{t}^T & \mathbf{t}^T \end{bmatrix} \delta\mathbf{d}$$

仮想仕事の原理

$$\delta U - \delta W = \int_0^{l_0} N \delta\varepsilon dx - \delta\mathbf{d}^T \mathbf{f} = \int_0^{l_0} \left(\delta\mathbf{d}^T \begin{Bmatrix} -\mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} \frac{1}{l_0} \right) N dx - \delta\mathbf{d}^T \mathbf{f} = \delta\mathbf{d}^T \left(\begin{Bmatrix} -\mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} N - \mathbf{f} \right) = 0$$

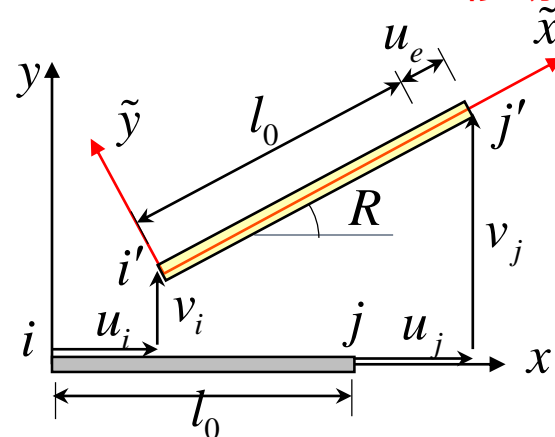
釣合式

$$\begin{Bmatrix} -\mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} N - \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

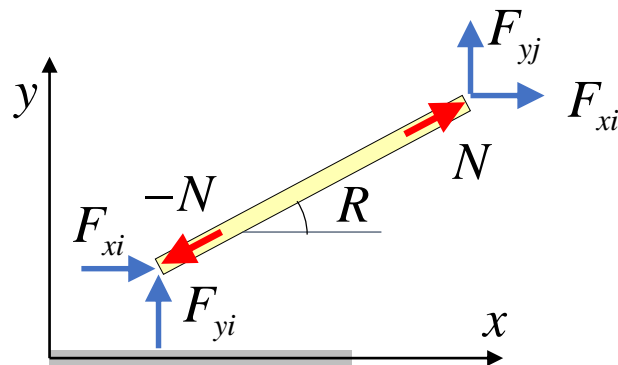
変形後の釣合

方向余弦ベクトル $\mathbf{t} = [\cos R \quad \sin R]^T$

移動座標



変位場



材端力と節点外力の釣合

トラス要素の釣合式と増分形釣合式

釣合式

微小変形 $\begin{Bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} N = \mathbf{f}$

$$\frac{EA}{l_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{d} - \mathbf{f} = \mathbf{0}$$

線形剛性マトリクス

釣合式

グリーン歪 $\begin{Bmatrix} -\mathbf{t}_g \\ \mathbf{t}_g \end{Bmatrix} N = \mathbf{f}$

増分形釣合式

$$\left[\frac{EA}{l_0} \begin{bmatrix} \mathbf{t}_g \mathbf{t}_g^T & -\mathbf{t}_g \mathbf{t}_g^T \\ -\mathbf{t}_g \mathbf{t}_g^T & \mathbf{t}_g \mathbf{t}_g^T \end{bmatrix} + \frac{N}{l_0} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right] \Delta \mathbf{d} = \Delta \mathbf{f}$$

線形+初期変位剛性マトリクス

幾何剛性マトリクス

釣合式

移動座標 $\begin{Bmatrix} -\mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} N = \mathbf{f}$

増分形釣合式

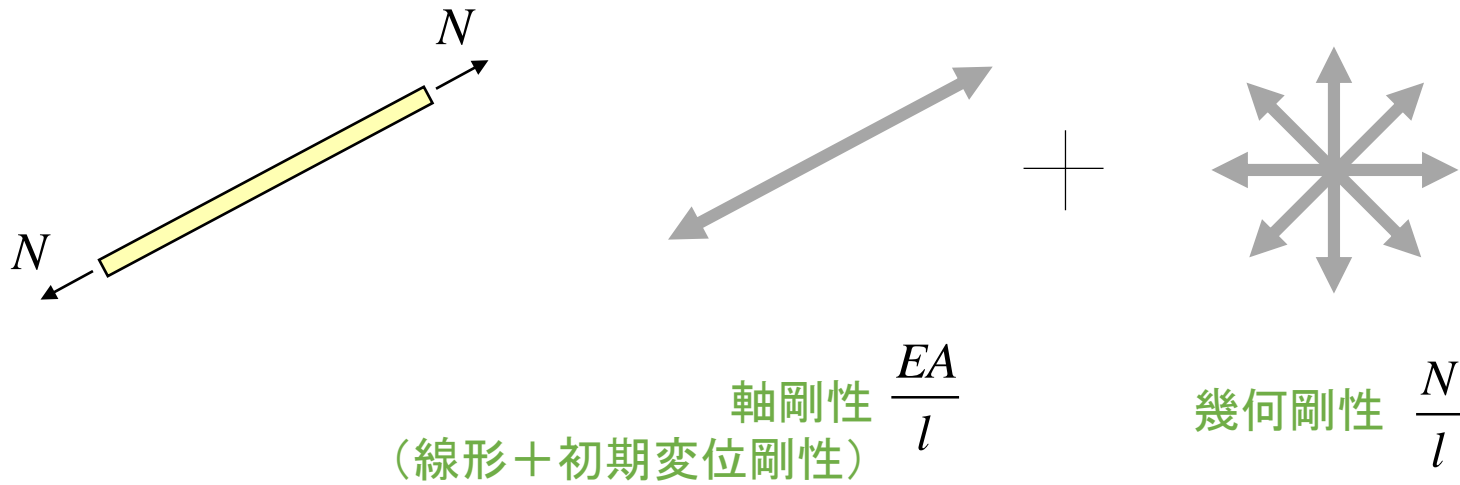
$$\left[\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{t} \mathbf{t}^T & -\mathbf{t} \mathbf{t}^T \\ -\mathbf{t} \mathbf{t}^T & \mathbf{t} \mathbf{t}^T \end{bmatrix} + \frac{N}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right] \Delta \mathbf{d} = \Delta \mathbf{f}$$

線形+初期変位剛性マトリクス

幾何剛性マトリクス

増分形 $\begin{Bmatrix} -\mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} \Delta N + \begin{Bmatrix} -\Delta \mathbf{t} \\ \Delta \mathbf{t} \end{Bmatrix} N - \Delta \mathbf{f} = \mathbf{0}$

トラス要素の釣合式と増分形釣合式



釣合式

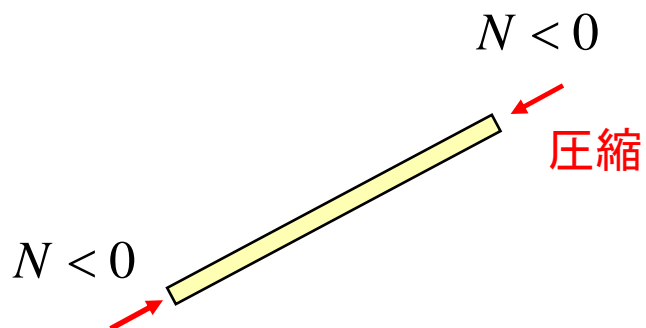
移動座標 $\begin{Bmatrix} -\mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} N = \mathbf{f}$

増分形釣合式

$$\left[\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{t}\mathbf{t}^T & -\mathbf{t}\mathbf{t}^T \\ -\mathbf{t}\mathbf{t}^T & \mathbf{t}\mathbf{t}^T \end{bmatrix} + \frac{N}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right] \Delta \mathbf{d} = \Delta \mathbf{f}$$

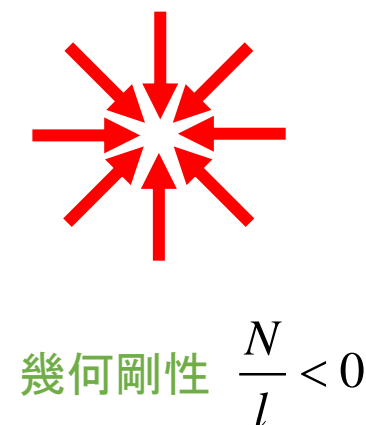
線形+初期変位剛性マトリクス 幾何剛性マトリクス

トラス要素の釣合式と増分形釣合式



負の幾何剛性が
周りの剛性を奪う。
座屈の主要因

軸剛性 $\frac{EA}{l}$
(線形+初期変位剛性)



釣合式

移動座標

$$\begin{Bmatrix} -\mathbf{t} \\ \mathbf{t} \end{Bmatrix} N = \mathbf{f}$$

増分形釣合式

$$\left[\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{t}\mathbf{t}^T & -\mathbf{t}\mathbf{t}^T \\ -\mathbf{t}\mathbf{t}^T & \mathbf{t}\mathbf{t}^T \end{bmatrix} + \frac{N}{l} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \right] \Delta \mathbf{d} = \Delta \mathbf{f}$$

線形+初期変位剛性マトリクス

幾何剛性マトリクス

3. 梁要素による幾何学的非線形解析

微小変形を仮定した梁要素



釣合式を比較しながら導出する。

移動座標を用いた梁要素

座屈たわみ角法と移動座標を用いた梁要素

2つの方法を紹介する

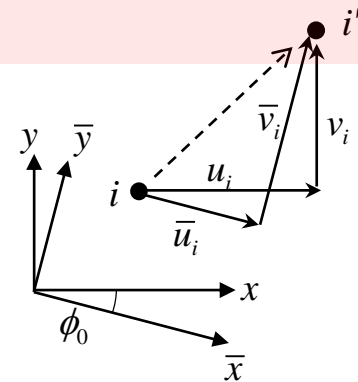
(仮想仕事の原理でなく) **直接剛性法**により釣合式を導出する

微小変形

移動座標

要素座標の節点変位と全体座標の節点変位の関係

$$u_i = \bar{u}_i \cos \phi_0 + \bar{v}_i \sin \phi_0, \quad v_i = -\bar{u}_i \sin \phi_0 + \bar{v}_i \cos \phi_0, \quad \theta_i = \bar{\theta}_i$$



材端変位－節点変位

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ \theta_{ei} \\ \theta_{ej} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \phi_0 & -\sin \phi_0 & 0 & \cos \phi_0 & \sin \phi_0 & 0 \\ \frac{\sin \phi_0}{l_0} & \frac{\cos \phi_0}{l_0} & 1 & \frac{\sin \phi_0}{l_0} & -\frac{\cos \phi_0}{l_0} & 0 \\ -\frac{\sin \phi_0}{l_0} & \frac{\cos \phi_0}{l_0} & 0 & \frac{\sin \phi_0}{l_0} & \frac{\cos \phi_0}{l_0} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{\theta}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \\ \bar{\theta}_j \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{T}_0 \bar{\mathbf{d}}$$

座標変換マトリクス

材端変位－節点変位

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{H}(\bar{\mathbf{d}})$$

非線形関数

$$\begin{Bmatrix} \Delta u_e \\ \Delta \theta_{ei} \\ \Delta \theta_{ej} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \phi & -\sin \phi & 0 & \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ \frac{\sin \phi}{l} & \frac{\cos \phi}{l} & 1 & \frac{\sin \phi}{l} & -\frac{\cos \phi}{l} & 0 \\ -\frac{\sin \phi}{l} & \frac{\cos \phi}{l} & 0 & \frac{\sin \phi}{l} & \frac{\cos \phi}{l} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{u}_i \\ \Delta \bar{v}_i \\ \Delta \bar{\theta}_i \\ \Delta \bar{u}_j \\ \Delta \bar{v}_j \\ \Delta \bar{\theta}_j \end{Bmatrix}$$

$$\Delta \mathbf{d}_e = \mathbf{T} \Delta \bar{\mathbf{d}}$$

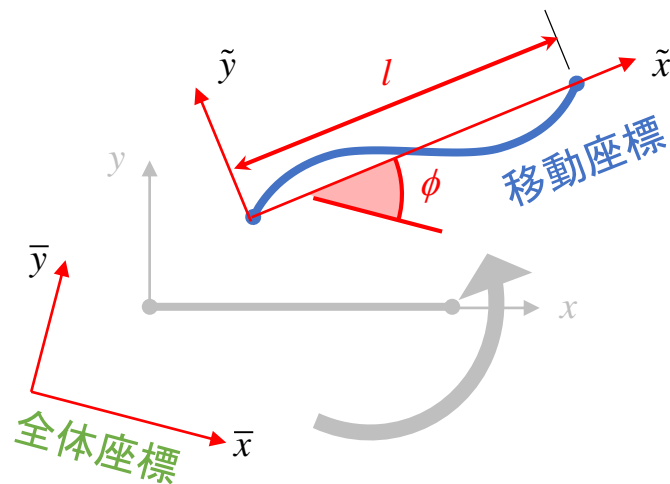
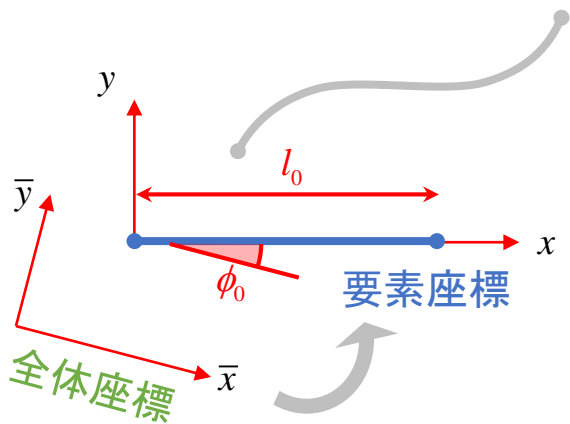
座標変換マトリクス

要素座標

全体座標

移動座標

全体座標

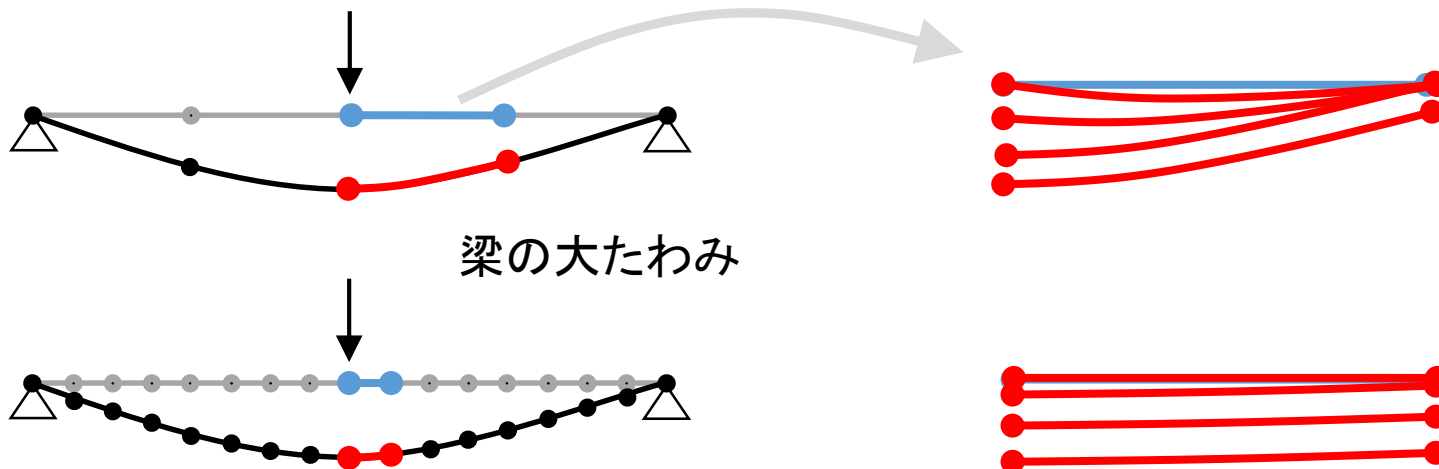


材端力－材端変位

$$N = \frac{EA}{l_0} u_e, M_i = \frac{2EI}{l_0} (2\theta_{ei} + \theta_{ej}), M_j = \frac{2EI}{l_0} (\theta_{ei} + 2\theta_{ej})$$

軸剛性

たわみ角法の基礎式 → 微小変形の仮定



梁の大たわみ

要素分割が細かいほど、剛体変位成分が大きく、弾性変形は小さい

十分な要素分割を行えば適用可能

材端力－材端変位

$$N = \frac{EA}{l_0} u_e, M_i = \frac{2EI}{l_0} (2\theta_{ei} + \theta_{ej}), M_j = \frac{2EI}{l_0} (\theta_{ei} + 2\theta_{ej})$$

軸剛性

たわみ角法の基礎式



マトリクス表現すると

材端力－材端変位

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_i \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l_0} & \frac{2EI}{l_0} \\ 0 & \frac{2EI}{l_0} & \frac{4EI}{l_0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_e \\ \theta_{ei} \\ \theta_{ej} \end{Bmatrix}$$

あるいは $\mathbf{q}_e = \mathbf{K}_L \mathbf{d}_e$

微小変形

節点外力—材端力

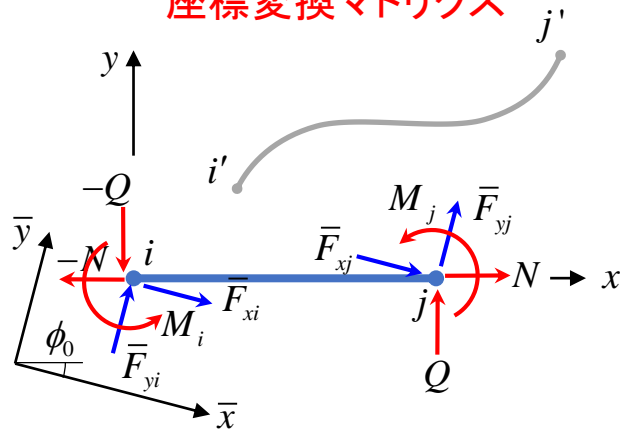
$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \phi_0 & \frac{\sin \phi_0}{l_0} & -\frac{\sin \phi_0}{l_0} \\ -\sin \phi_0 & \frac{\cos \phi_0}{l_0} & \frac{\cos \phi_0}{l_0} \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \phi_0 & \frac{\sin \phi_0}{l_0} & \frac{\sin \phi_0}{l_0} \\ \sin \phi_0 & -\frac{\cos \phi_0}{l_0} & -\frac{\cos \phi_0}{l_0} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M_i \\ M_j \end{Bmatrix}$$

全体座標

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}_0^T \mathbf{q}_e$$

要素座標

座標変換マトリクス



変形前の釣合

移動座標

節点外力—材端力

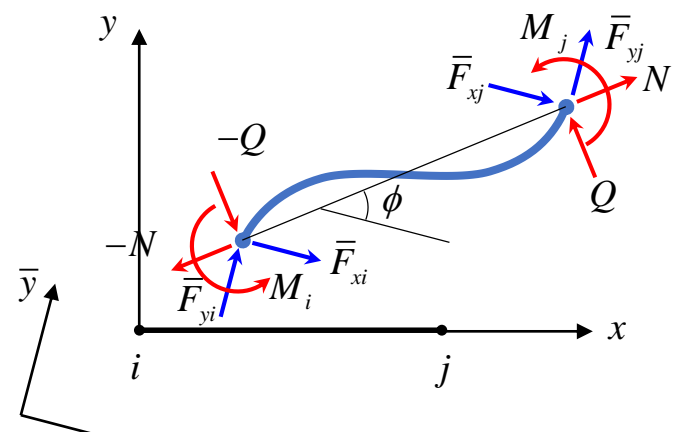
$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_{xi} \\ \bar{F}_{yi} \\ \bar{M}_i \\ \bar{F}_{xj} \\ \bar{F}_{yj} \\ \bar{M}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \phi & \frac{\sin \phi}{l} & -\frac{\sin \phi}{l} \\ -\sin \phi & \frac{\cos \phi}{l} & \frac{\cos \phi}{l} \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos \phi & \frac{\sin \phi}{l} & \frac{\sin \phi}{l} \\ \sin \phi & -\frac{\cos \phi}{l} & -\frac{\cos \phi}{l} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M_i \\ M_j \end{Bmatrix}$$

全体座標

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \mathbf{q}_e$$

移動座標

座標変換マトリクス



変形後の釣合

微小変形

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{T}_0 \bar{\mathbf{d}} \quad \text{材端変位一節点変位}$$

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{K}_L \mathbf{d}_e \quad \text{材端力一材端変位}$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}_0^T \mathbf{q}_e \quad \text{節点外力一材端力}$$

釣合式 $\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}_0^T \mathbf{K}_L \mathbf{T}_0 \bar{\mathbf{d}}$

移動座標

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{H}(\bar{\mathbf{d}}) \quad \text{材端変位一節点変位}$$

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{K}_L \mathbf{d}_e \quad \text{材端力一材端変位}$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \mathbf{q}_e \quad \text{節点外力一材端力}$$

釣合式 $\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_L \mathbf{H}(\bar{\mathbf{d}})$

移動座標

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{H}(\bar{\mathbf{d}}) \quad \text{材端変位一節点変位}$$

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{K}_L \mathbf{d}_e \quad \text{材端力一材端変位}$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \mathbf{q}_e \quad \text{節点外力一材端力}$$

増分形



$$\Delta \mathbf{d}_e = \mathbf{T} \Delta \bar{\mathbf{d}}$$

$$\Delta \mathbf{q}_e = \mathbf{K}_L \Delta \mathbf{d}_e$$

$$\Delta \bar{\mathbf{f}} = \Delta \mathbf{T}^T \mathbf{q}_e + \mathbf{T}^T \Delta \mathbf{q}_e$$

$$\Delta \mathbf{T}^T \mathbf{q}_e = \bar{\mathbf{K}}_G \Delta \bar{\mathbf{d}}$$

釣合式

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_L \mathbf{H}(\bar{\mathbf{d}})$$

幾何剛性マトリクス

$$\bar{\mathbf{K}}_G = \begin{bmatrix} a & b & 0 & -a & -b & 0 \\ & c & 0 & -b & -c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ sym & & & a & b & 0 \\ & & & & c & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$a = \frac{1}{l} (N \sin^2 \phi + 2Q \sin \phi \cos \phi)$$

$$b = \frac{1}{l} \{ -N \sin \phi \cos \phi + Q (\sin^2 \phi - \cos^2 \phi) \}$$

$$c = \frac{1}{l} (N \cos^2 \phi - 2Q \sin \phi \cos \phi)$$

$$Q = -\frac{M_i + M_j}{l}$$

増分形釣合式

$$\Delta \bar{\mathbf{f}} = \left[\mathbf{T}^T \mathbf{K}_L \mathbf{T} + \bar{\mathbf{K}}_G \right] \Delta \bar{\mathbf{d}}$$

微小変形

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{T}_0 \bar{\mathbf{d}} \quad \text{材端変位一節点変位}$$

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{K}_L \mathbf{d}_e \quad \text{材端力一材端変位}$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}_0^T \mathbf{q}_e \quad \text{節点外力一材端力}$$

$$\text{釣合式} \quad \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}_0^T \mathbf{K}_L \mathbf{T}_0 \bar{\mathbf{d}}$$

移動座標

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{H}(\bar{\mathbf{d}}) \quad \text{材端変位一節点変位}$$

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{K}_L \mathbf{d}_e \quad \text{材端力一材端変位}$$

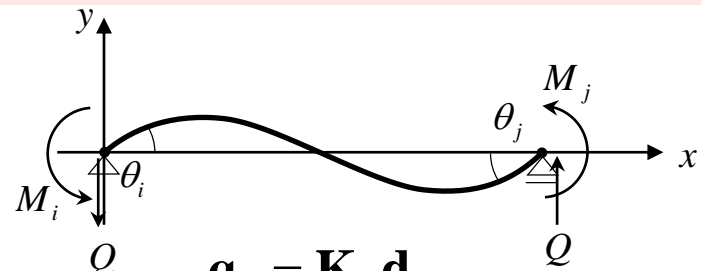
$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \mathbf{q}_e \quad \text{節点外力一材端力}$$

$$\text{釣合式} \quad \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_L \mathbf{H}(\bar{\mathbf{d}})$$

$$\text{増分形釣合式} \quad \Delta \bar{\mathbf{f}} = \left[\mathbf{T}^T \mathbf{K}_L \mathbf{T} + \bar{\mathbf{K}}_G \right] \Delta \bar{\mathbf{d}}$$

$$\bar{\mathbf{K}}_G = \begin{bmatrix} a & b & 0 & -a & -b & 0 \\ & c & 0 & -b & -c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & a & b & 0 \\ \text{sym} & & & & c & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

移動座標



$$\mathbf{q}_e = \mathbf{K}_L \mathbf{d}_e$$

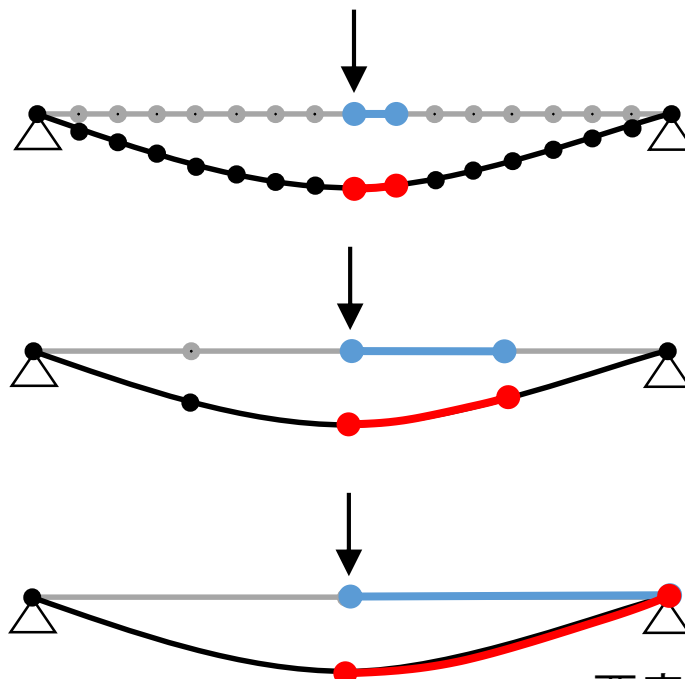
$$\begin{Bmatrix} N \\ M_i \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l_0} & \frac{2EI}{l_0} \\ 0 & \frac{2EI}{l_0} & \frac{4EI}{l_0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_e \\ \theta_{ei} \\ \theta_{ej} \end{Bmatrix}$$

たわみ角法の基礎式

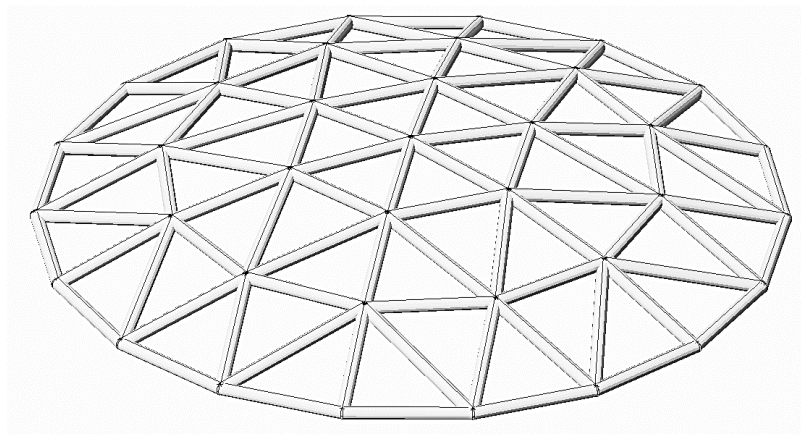
$$M_i = \frac{2EI}{l_0} (2\theta_{ei} + \theta_{ej}),$$

$$M_j = \frac{2EI}{l_0} (\theta_{ei} + 2\theta_{ej})$$

微小変形の仮定がまだ
含まれている

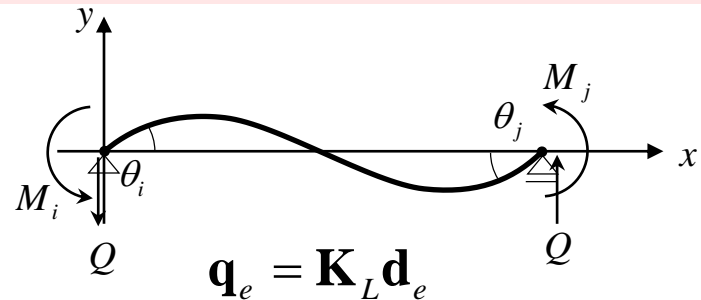


要素分割が粗いと
精度悪くなる。



1部材1要素として解析するのは難しい

移動座標



$$\mathbf{q}_e = \mathbf{K}_L \mathbf{d}_e$$

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_i \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l_0} & \frac{2EI}{l_0} \\ 0 & \frac{2EI}{l_0} & \frac{4EI}{l_0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_e \\ \theta_{ei} \\ \theta_{ej} \end{Bmatrix}$$

たわみ角法の基礎式

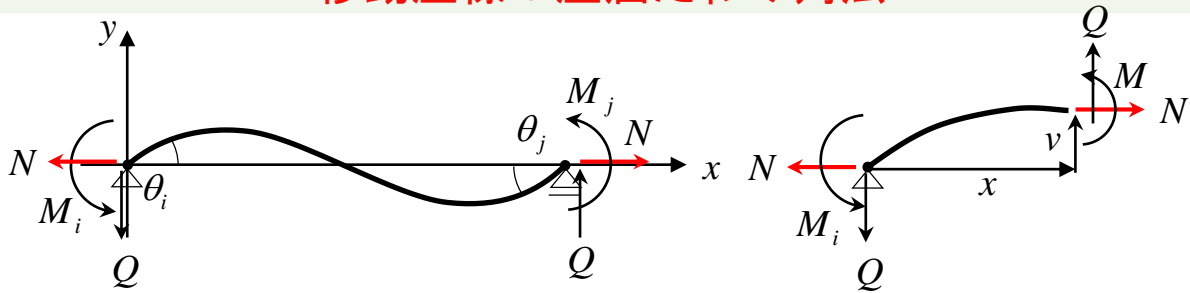
$$M_i = \frac{2EI}{l_0} (2\theta_{ei} + \theta_{ej}),$$

$$M_j = \frac{2EI}{l_0} (\theta_{ei} + 2\theta_{ej})$$

微小変形の仮定

たわみ角法の基礎式を
座屈たわみ角法の基礎式に入れ替える

移動座標+座屈たわみ角法



$$\begin{Bmatrix} N \\ M_i \\ M_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{l_0} s & \frac{EI}{l_0} sc \\ 0 & \frac{EI}{l_0} sc & \frac{EI}{l_0} s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_e \\ \theta_{ei} \\ \theta_{ej} \end{Bmatrix}$$

変形後の釣合

座屈たわみ角法の基礎式

$$M_i = \frac{EI}{l_0} (s\theta_{ei} + sc\theta_{ej}), \quad M_j = \frac{EI}{l_0} (sc\theta_{ei} + s\theta_{ej})$$

$$N < 0 \quad s = \frac{(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)\alpha}{2(1 - \cos \alpha) - \alpha \sin \alpha}, \quad c = \frac{\alpha - \sin \alpha}{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}$$

$$N = 0 \quad s = 4, c = 0.5$$

$$N > 0 \quad s = \frac{(\sinh \alpha - \alpha \cosh \alpha)\alpha}{2(\cosh \alpha - 1) - \alpha \sinh \alpha}, \quad c = \frac{\alpha - \sinh \alpha}{\sinh \alpha - \alpha \cosh \alpha}$$

$$\alpha = l_0 \sqrt{\frac{|N|}{EI}} = \pi \sqrt{\frac{|N|}{N_E}}, \quad N_E = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}$$

釣合式 $\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_L \mathbf{H}(\bar{\mathbf{d}})$

$$\mathbf{K}_L = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l_0} & \frac{2EI}{l_0} \\ 0 & \frac{2EI}{l_0} & \frac{4EI}{l_0} \end{bmatrix}$$

増分形釣合式

$$\Delta \bar{\mathbf{f}} = \left[\mathbf{T}^T \mathbf{K}_L \mathbf{T} + \bar{\mathbf{K}}_G \right] \Delta \bar{\mathbf{d}}$$

釣合式 $\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_N \mathbf{H}(\bar{\mathbf{d}})$

$$\mathbf{K}_N = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{EI}{l_0} s & \frac{EI}{l_0} sc \\ 0 & \frac{EI}{l_0} sc & \frac{EI}{l_0} s \end{bmatrix}$$

増分形釣合式

$$\Delta \bar{\mathbf{f}} = \left[\mathbf{T}^T \mathbf{K}_N \mathbf{T} + \bar{\mathbf{K}}_G \right] \Delta \bar{\mathbf{d}}$$

$\Delta \mathbf{K}_N$ の影響は小さいものとして無視

線形座屈解析の方法について

増分形釣合式

$$\Delta \bar{\mathbf{f}} = \left[\mathbf{T}^T \mathbf{K}_L \mathbf{T} + \bar{\mathbf{K}}_G \right] \Delta \bar{\mathbf{d}}$$

・座屈前変形ゼロ $\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}_0$

・幾何剛性を線形化

$$\bar{\mathbf{K}}_G(\mathbf{q}_e, \bar{\mathbf{d}}) \rightarrow \bar{\mathbf{K}}_{G0} = \bar{\mathbf{K}}_G(\mathbf{q}_{e0}, \mathbf{0})$$

↑
線形応力解析で求めた内力



線形座屈解析

$$\left[\mathbf{T}_0^T \mathbf{K}_L \mathbf{T}_0 + \lambda_i \bar{\mathbf{K}}_{G0} \right] \phi = \mathbf{0}$$

増分形釣合式

$$\Delta \bar{\mathbf{f}} = \left[\mathbf{T}^T \mathbf{K}_N \mathbf{T} + \bar{\mathbf{K}}_G \right] \Delta \bar{\mathbf{d}}$$

\mathbf{K}_N を N について線形化

$$\mathbf{K}_N \approx \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4EI}{l_0} & \frac{2EI}{l_0} \\ 0 & \frac{2EI}{l_0} & \frac{4EI}{l_0} \end{bmatrix} + N \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2l_0}{15} & -\frac{l_0}{30} \\ 0 & -\frac{l_0}{30} & \frac{2l_0}{15} \end{bmatrix} = \mathbf{K}_L + \mathbf{K}_{NG}$$

もう一つの
幾何剛性
マトリクス

$\mathbf{T} \rightarrow \mathbf{T}_0$

$$\bar{\mathbf{K}}_G(\mathbf{q}_e, \bar{\mathbf{d}}) \rightarrow \bar{\mathbf{K}}_{G0} = \bar{\mathbf{K}}_G(\mathbf{q}_{e0}, \mathbf{0})$$

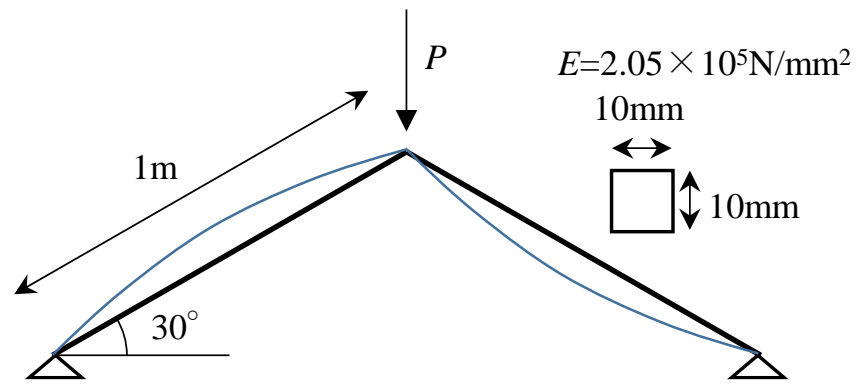


線形座屈解析

$$\left[\mathbf{T}_0^T \mathbf{K}_L \mathbf{T}_0 + \lambda_i \left(\mathbf{T}_0^T \mathbf{K}_{NG0} \mathbf{T}_0 + \bar{\mathbf{K}}_{G0} \right) \right] \phi = \mathbf{0}$$

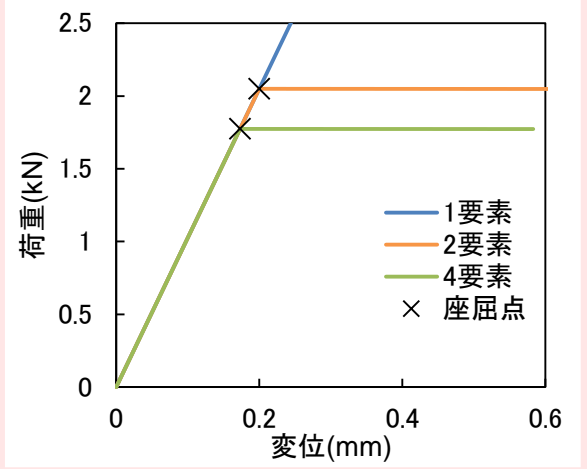
3. 梁要素による幾何学的非線形解析

数値解析例

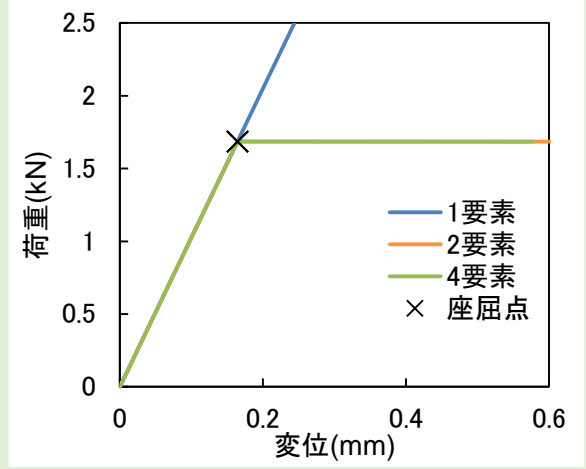


解析結果

要素分割	線形座屈荷重 P_{cr}^{lin} (kN)		弾性座屈荷重 P_{cr}^{el} (kN)		オイラー座屈荷重 P^E (kN)
	移動座標	移動座標 + 座屈たわみ角法	移動座標	移動座標 + 座屈たわみ角法	
1要素	6835	2.050	-	1.686	1.686
2要素	2.050	1.699	2.050	1.686	
4要素	1.775	1.687	1.774	1.686	

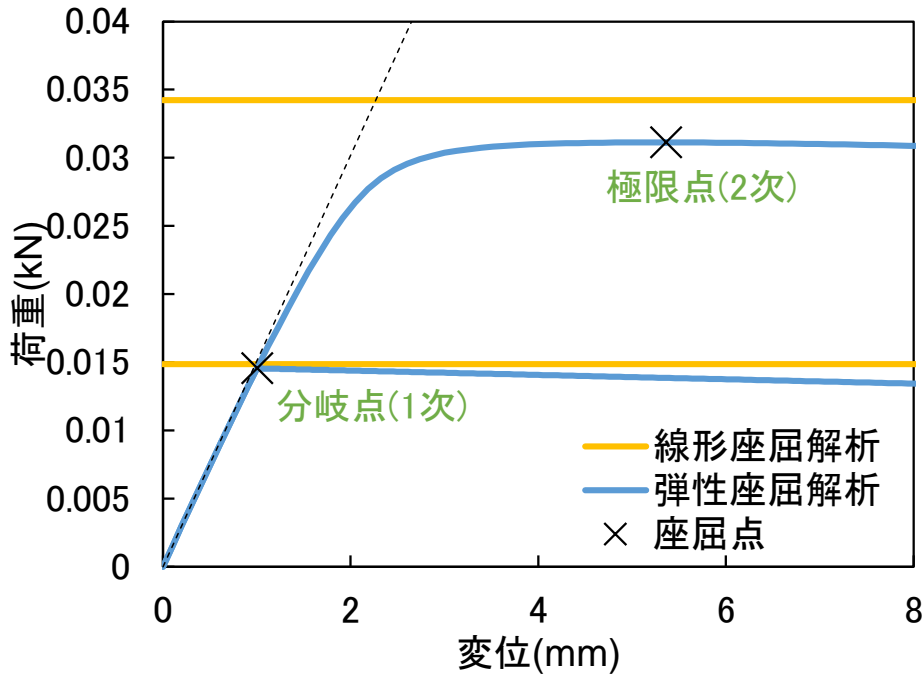
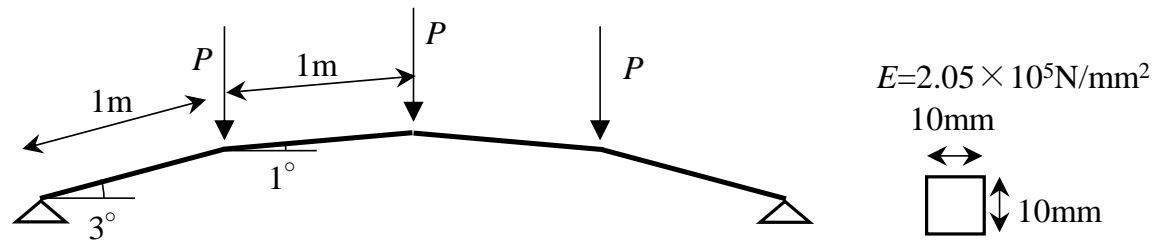


移動座標



移動座標 + 座屈たわみ角法

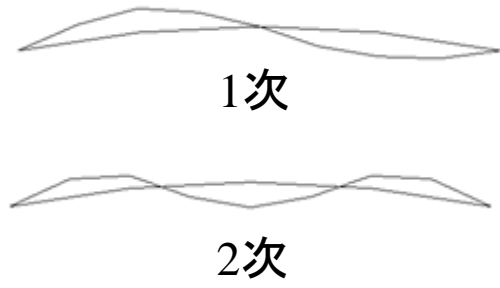
数値解析例



荷重－変位関係

座屈荷重

要素分割		線形座屈荷重 P_{cr}^{lin} (kN)	弾性座屈荷重 P_{cr}^{el} (kN)
1要素	分岐点(1次)	0.0149	0.0146
	極限点(2次)	0.0342	0.0312
2要素	分岐点(1次)	0.0148	0.0146
	極限点(2次)	0.0332	0.0311



座屈モード

おわりに

「座屈解析法と基本例題による演習」

ここで説明した座屈解析のプログラムをエクセルのVBAで作成したマクロファイルを以下のURLに置いた。

[http:// kyamamoto.html.xdomain.jp/seminar](http://kyamamoto.html.xdomain.jp/seminar)

2次元のトラス要素と梁要素を例として、骨組構造の座屈解析法について説明した。

弾塑性座屈解析について説明しなかった。

ラチスシェルの座屈解析を行う上での注意点について幾つか資料に書いた。