

曲面構造の形状最適化に関する基礎的研究

－モーメント分布最小化と座屈荷重最大化－

Fundamental Studies on Shape Optimization of Shell Structures

: Minimization of Moment Distribution and Maximization of Buckling Load

2005年

山本憲司

目次

序論	1
I. 応力分布を目的関数とする曲面構造の形状最適化	
1. 曲げモーメントフリー曲面形状決定問題の定式化	11
1.1 はじめに	11
1.2 目的関数	11
1.3 制約条件の導入	12
1.4 最適性必要条件	12
1.5 逐次二次計画法	13
1.5.1 部分二次計画問題	13
1.5.2 BFGS 公式の適用	14
1.5.3 直線探索法	15
1.6 感度解析	16
1.7 解析手順	17
1.8 1章のまとめ	18
2. 軸対称シェルの形状最適化	19
2.1 はじめに	19
2.2 軸対称シェル要素による定式化	19
2.2.1 釣合方程式	19
2.2.2 最適化問題	22
2.3 自重の作用する軸対称シェルの数値解析	23
2.4 積雪荷重の作用する軸対称シェルの数値解析	27
2.5 風荷重の作用する軸対称シェルの数値解析	30
2.6 数値解析結果の考察	32
2.6.1 曲げモーメントの節点座標に対する感度	32
2.6.2 縁応力	34
2.7 2章のまとめ	36
3. 自由曲面シェルの形状最適化	37
3.1 はじめに	37
3.2 テンソル積ベジエ曲面による曲面の表現	37
3.3 三角形平面シェル要素	38
3.3.1 面内変形要素	39
3.3.2 面外変形要素	40
3.4 最適化問題の設定	41
3.4.1 曲線長さ指定の制約条件	41
3.4.2 最適性必要条件	42
3.5 正方形平面を有するシェルの数値解析	43
3.6 異形平面を有するシェルの数値解析	50

3.7	数値解析結果の考察	52
3.7.1	境界条件の影響	52
3.8	3章のまとめ	54
4.	スペースフレームの形状最適化	55
4.1	はじめに	55
4.2	直線材要素による定式化	55
4.2.1	釣合方程式	55
4.2.2	目的関数	57
4.2.3	制約条件	58
4.2.4	最適性必要条件	58
4.3	二方向格子シェルの数値解析	59
4.4	ラチスドームの数値解析	62
4.5	分割パターンの異なるラチスシェルの数値解析	64
4.6	4章のまとめ	70
5.	まとめ	71
II.	座屈荷重を目的関数とする曲面構造の形状最適化	
1.	単純臨界型の座屈荷重を有するアーチの形状最適化	75
1.1	はじめに	75
1.2	最適化問題の定式化	75
1.2.1	目的関数及び制約条件	75
1.2.2	平面直線材要素による幾何学的非線形解析	77
1.2.2.1	移動座標系	77
1.2.2.2	釣合方程式	78
1.2.2.3	移動座標系から全体座標系への変換	79
1.2.2.4	線形座屈解析	80
1.2.3	臨界点の分類と座屈荷重係数感度	81
1.2.3.1	臨界点の分類	81
1.2.3.2	極限点における座屈荷重係数感度	82
1.2.3.3	対称分岐点における座屈荷重係数感度	83
1.2.4	解析手順	84
1.3	数値解析	85
1.3.1	等分布荷重を受けるアーチの解析	85
1.3.2	集中荷重を受けるアーチの解析	86
1.3.3	解析結果の考察	94
1.3.3.1	他の関数形状を有するアーチとの座屈荷重の比較	94
1.3.3.2	線形座屈解析による検討	95
1.3.3.3	最終形状の形状不整に対する敏感性の検討	99
1.3.3.4	外力モードの違いによる最適解の比較	100
1.4	1章のまとめ	102

2.	重複臨界型の座屈荷重を有するスペースフレームの形状最適化	103
2.1	はじめに	103
2.2	最適化の方法	105
2.2.1	最適化問題の設定	105
2.2.2	直線材要素による幾何学的非線形解析	106
2.2.2.1	移動座標系	106
2.2.2.2	釣合方程式	108
2.2.3	座屈前変形を考慮した近似座屈荷重係数及び感度	110
2.2.4	座屈荷重係数の重複を考慮した最適化方法	113
2.2.4.1	目的関数および制約条件	113
2.2.4.2	最適性必要条件	114
2.2.4.3	重複固有値の感度係数について	115
2.3	数値解析	116
2.3.1	アーチの数値解析例	116
2.3.2	格子シェルの数値解析例	120
2.3.2.1	解析モデル及び解析結果	120
2.3.2.2	座屈モードに対する剛性の比較	124
2.3.2.3	形状不整に対する性状の比較	125
2.3.2.4	線形応力解析結果	127
2.4	2章のまとめ	128
3.	対称性を利用した重複固有値感度の評価とトラスドームの形状最適化	129
3.1	はじめに	129
3.2	対称性による剛性行列のブロック対角化	130
3.2.1	構造物の対称性と対称操作による変位の変換	130
3.2.2	剛性行列のブロック対角化法	132
3.2.2.1	既約表現に従う基底モードの作成	133
3.2.2.2	剛性行列のブロック対角化	140
3.2.3	ブロック対角化法による線形座屈解析例	141
3.3	既約表現による重複固有値の分類	143
3.3.1	固有値の感度係数	143
3.3.2	重複固有値の分類	144
3.4	最適化問題の定式化	146
3.5	数値解析	147
3.5.1	3変数モデル	147
3.5.2	12変数モデル	148
3.6	3章のまとめ	152
4.	まとめ	153
	結論	155
	参考文献	157

謝辞	163
発表論文	165
付録A 軸対称シェル要素の定式化—マトリクス詳細	169
付録B 三角形平面シェル要素の定式化—マトリクス詳細	172
付録C 直線材要素の定式化—マトリクス詳細	179
付録D 平面直線材要素の定式化—感度解析部分詳細	181
付録E 既約表現	188

序論

研究の背景

曲面構造の「形」の力学的意義

構造重量は寸法の3乗に比例するのに対し、部材の強度は寸法の2乗に比例する。従って、一般に構造物は規模が大きくなるほど、自重による初期応力が構造材の載荷抵抗容量の多くを占め、他の外部荷重に対する抵抗性を与えることが困難になる。この為、大スパン構造を実現するには形態に何らかの力学的効果を含める必然性を生じてくる。例えばスパンが大きくなるほど構造形態は強い力学的制約を受け、膜やケーブルなどの柔構造を除けば、最終的にその形態は最も効率の良いドーム形式とすることを余儀なくされる。中規模であれば、円筒シェルや折板構造など、その形態に含められる力学的効果の度合いに応じた幾つかの選択肢を生むだろう。

しかし、構造材料、施工技術、コンピュータによる構造解析技術、応答制御技術などが急速に進歩し、現代ではこうした構造物の規模と形態の相関性を生じさせない程の高い建設技術を有している。この建設技術の高度化は、更に力学的に不合理なものまで建設可能とする為に、これまで以上に構造形態に対する深い理解と、意匠性、施工性、経済性などを総合的に勘案し、適切な形態を決定するだけの判断力が要求される時代になっている。空間構造は規模の大きさからモニュメント的な役割を担う場面も多く、意匠性が重要視される傾向もあるが、大スパンである為に、その建築表現には常に力学的な合理性を持つものが求められている。

空間構造の構造形式のうち最も典型的なものは、ドームやラチスシェルなどの圧縮抵抗型の曲面構造である。曲面は分布外力に対し主に膜力で抵抗し、曲げで抵抗する平板よりも有利な力学的形状を有する。その形態は、多くの場合、球形、円筒形、円錐形、HP曲面といった幾何学関数の曲面が利用される。現在では複数の曲面を相貫させたり、曲面の一部を切り欠く等、意匠的な要求によって年々その形態に複雑化が見られる。一般に曲面構造の解析は煩雑或いは規模の大きいものである為、直感により力学挙動を予測することは困難である。この為、力学的な拠り所のない形状決定は、不合理なものを導きやすく、無理に補剛したり、厚みを持たせる等して、結果的に不経済な構造物を生じさせる。

こうした現状において、設計の初期段階に、何らかの構造的指標となるような曲面の形態が提示されることが望まれる。H.Isler¹⁾やF.Otto²⁾に代表される懸垂模型を用いた形状決定は、効果的な方法のひとつであろう。一方で、近年のコンピュータと有限要素法に代表される構造解析技術の発達はめざましく、現在では如何なる曲面の力学挙動も、動的応答や終局状態までも十分な精度で予測可能になった。また、これら構造解析の周辺技術として、システム同定や最適設計などの逆解析的手

法が急速に発展しており、指定した力学挙動を示す構造物を得ることさえ十分可能になりつつある。

曲面構造は、「形」によって大スパンを可能にしてきた構造形式である。これまでのように曲面の力学性状を単に平板と比較して良しとするのではなく、最良な形が何であるかを考え、「力学的合理性」といった曖昧な言葉の意味を具現化し、定量化していくことが、現在の大きな課題のひとつであろう。

シェルの形状決定問題

シェルの力学的に理想的な形態を解析的に求める試みがなされている。シェルの厚さ、リブやRCシェルの補強筋の最適な配置などを決定する研究もあるが、ここでは特にシェル中立面の形状を扱ったものを挙げる。

シェルの形状決定問題の最初のもは、1908年のMilankovic³⁾の研究とされる。そこでは、シェル断面内の応力が同時に材料強度に達することを意図して、曲面全体で膜応力が一様となる条件を膜力の釣り合い方程式に与え、これを満たすシェル厚と中立面の形状を求める問題として扱われている。外力は自重と液体の内圧が与えられている。この等応力曲面を求める問題は、Flugge⁴⁾などによっても解かれている。特に液体の内圧による解は、表面張力による水滴の形状に対応し、実際の液体タンクとして建設されている⁴⁾。ところで、組み合わせ応力下では材料の破壊条件はより複雑であり、実際には膜応力を一様とすることは適切でない。Biezeno⁵⁾はこれを指摘し、トレスカの降伏条件を膜応力の満たす条件として与え、シェル曲面の強度を一様とする問題を扱っている。同様の問題はStubble⁶⁾、Brown⁷⁾などによっても扱われている。以上の研究は、いずれも膜力の釣り合い式に、応力分布を指定するか或いは分布に関して何らかの条件を与えて釣り合い形状を求めるもので、曲げによる影響は考慮されていない。この他、シェル曲面を決定する簡単な方法として、柔軟な膜の大変形解析を行い、変形後の釣合形状を利用するものも見られる⁸⁾。

曲げモーメントの発生しないシェルの形状を解析的に求めたものにHorne⁹⁾の研究がある。そこでは、分布外力は考慮されていないものの、シェル上下端に一定の鉛直力を受ける軸対称シェルに対し、膜の基礎方程式に曲率変化が零という条件を付加して、シェル形状の満たすべき微分方程式を導出し、解を求めている。

これら初期の研究は、最適なシェルの形態が満たすべき条件を仮定して基礎方程式に与え、形状を求めるか或いは残された変数の関係を調査したものである。一方、1950年代に線形計画法、1960年代に非線形計画法といった数理計画法が開発されると、最適設計法の概念が明確な形で現れてきた。これは、構造形態を決める各部の寸法、形状を代表する値を変数とし、その構造物のある種の目的関数を定め、数学的な最適化に関する種々の方法を用いて、与えられた制約条件下で目的関数を最大或いは最小とする変数を決める方法である。数理計画法による最適設計問題は、主にトラスや骨組構造の最小重量設計問題を中心に発展した。トラスの最小重量問題において、節点座標を設

計変数として形状最適化を行った初期のものとして Pedersen¹⁰⁾による研究がある。シェル最適化問題においても、数理計画法を用いた感度解析による逐次修正が行われ、構造解析には有限要素法のような離散化手法が多く用いられるようになった。シェルの形状を設計変数とし、応力の最大値を目的関数として最適化を行ったものに Trompette, Marcellin¹¹⁾, Younsheng¹²⁾, Barbosa, Soares¹³⁾などがある。これらはいずれも軸対称シェルを扱っている。Ramm¹⁴⁾は、外力により生ずる歪エネルギーを目的関数とし、制約に構造材の体積一定の条件を与えており、Isler のシェルに見られるような点支持されたシェルを解析対象とし、剛性の高いシェル形状を求めている (Fig. 1-1)。文献 15)ではこの問題における最適形状の、シェル縁におけるミーゼス応力の分布が示されており、幾何学的な形状と比べて応力集中が回避される結果が示されている。また、同文献中には膜の大変形解析により形状決定された四点支持 RC シェルによる、载荷実験及び材料及び幾何学非線形解析の結果も示されている。Hinton, Rao¹⁶⁾は同様に歪エネルギーを目的関数とし、帯板要素を用いて筒状シェルの形状最適化を行っている。この文献では膜力、曲げモーメント、せん断力の歪エネルギーに対する寄与率が示されており、最適解では膜力が支配的になることが示されている。

以上の研究は主に、線形弾性応答時における応力に関して何らかの目的関数或いは最適規準を設け、シェルの形状を決定する問題である。一方で、シェルは薄肉で建てられるために、圧縮力によって座屈を生じやすい。この為、安定性を考慮した最適化研究も行われている。

シェルの形状決定問題に安定性を考慮した初期のものとして1952年のFeigen¹⁷⁾の研究が挙げられる。軸圧縮力を受ける両端にテーパのついた筒状柱に対し、座屈を制約として最小重量設計問題を解析的に検討している。そこでは、Shanley¹⁸⁾による同時崩壊モード設計 (simultaneous failure mode approach) に基づいて、全体座屈とシェル型の局所座屈と材料降伏が同時に起こる際の形状について検討している。また、Zyczkowski, Kruszelecki¹⁹⁾は、シェルの純曲げを受ける筒状シェルの座屈荷重が最大となる断面形状を解析的に求めている。これらの古典的な研究では、座屈荷重は陽に表現された近似式が用いられている。

軸圧縮力を受けるソリッドな柱の座屈荷重を最大とする形状は Tadjbakahsh, Keller²⁰⁾によって示さ

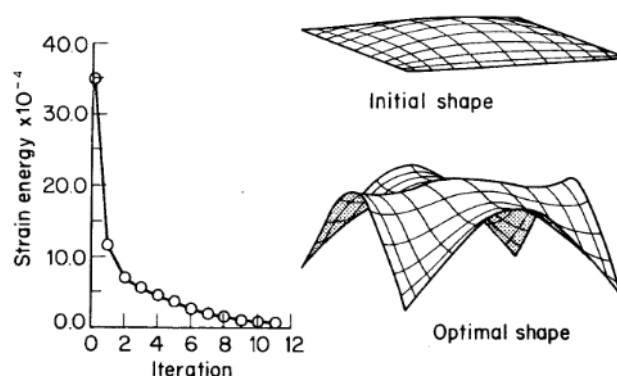


Fig.1-1 歪エネルギー最小化によるシェルの形状決定¹⁵⁾

れた。その後 Olhoff, Rasmussen²¹⁾によって、両端固定とした柱では最適解で座屈荷重の重複が生じることが指摘された。座屈荷重の最適化問題では、あるモードの座屈荷重を上昇させると、他のモードの座屈荷重が下降し、最適解で複数のモードの座屈荷重が重複する傾向がある。この傾向は問題を複雑にし、最適解を求め難いものにする。

Solodovnikov²²⁾は線形座屈荷重と線形座屈時の応力を制約条件として軸対称シェル最小重量問題を扱っている。最適化アルゴリズムは勾配法に基づいているが、座屈荷重の重複に対しては特別な考慮は必要なかった事が述べられている。鉛直等加速度外力を受ける境界固定支持のシェルの解析例では、曲げモーメント分布が小さくなる結果が示されている。Plaut, Olhoff²³⁾はアーチの長さを一定とする条件のもとで、非線形座屈荷重を最大とする扁平アーチの形状を解析的に求めている。最適形状は境界を固定とした場合、境界付近で傾きが零となる結果が示されている (Fig.1-2)。また、この問題では座屈荷重の重複は生じないことが示されている。Plaut, Johnson²⁴⁾は非線形座屈荷重を最大とする扁平軸対称シェルの形状を最適性規準法により求めている。最適形状は境界を固定とした場合、アーチの場合と同様に境界付近で傾きが零となる結果が示されており (Fig.1-3)、座屈荷重は球形シェルと比べ最大で110%上昇する結果が示されている。座屈荷重の重複を考慮した定式は行っておらず、得られた解では重複を生じていないが、厳密な解では重複するであろうと予測している。Reitinger, Ramm²⁵⁾は点支持されたシェルの非線形座屈荷重の最大化を行っている。座屈荷重を上昇させた最適形態は形状不整に対し敏感となることを示し、予め不整を与えた系の座屈荷重を最大化する方法を示している。座屈荷重の重複は考慮されていない。陳、川口²⁶⁾はスペースフレームの座屈最適化を行っている。ここでは、非線形座屈荷重の最大化を行う簡易的な方法として、釣り合い経路解析における座屈点近傍に到るまでの荷重増分量の和の最大化を行うことを提案している。小河ら²⁷⁾はスペースフレームの線形座屈荷重を最大化しながら、部材長さを揃え、部材種類を少なくする方法を提案している。この他、実験的研究には Akerstrom, Jernstrom, Wierzbicki²⁸⁾の研究などがある。軸圧縮力を受けるアルミ箔製のアングルの座屈荷重が最大となる形状を、実験と解析により考察している。アングルのコーナー部分の曲率や比較的大きな形状不整を与えた場合の座屈荷重の変化を調査している。

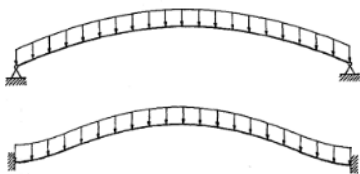


Fig.1-2 アーチの座屈荷重最大形状²³⁾

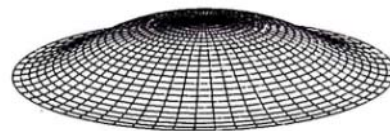


Fig.1-3 ドームの座屈荷重最大形状²⁴⁾

研究の目的と方法

設計実務の観点から曲面構造の形状を決定する場合、要求されるあらゆる設計条件を制約条件として与え、最小重量設計を行うのが最も一般的な方法と考えられる。しかし、既に述べたように、曲面構造の力学挙動は例え線形問題でも複雑であり、幾何学関数によらない自由曲面の力学挙動を、直感により評価することは困難である。この為、多くの設計条件を付与して得られた解からは、曲面形状が各々の制約条件から受けている影響など、その解が導かれた理由に対する力学的な解釈は得られない。曲面構造の形状を力学的に決定するには、まず様々な力学応答に与える曲面形状の影響を調査し、その大域的な性状を把握することが重要であると考えられる。

力学的に曲面形状を決定するための基礎的研究として、本研究では、曲面構造において特徴的な性質と考えられる「曲げモーメント分布」と「座屈」の二つの力学応答に着目する。曲げモーメントは材料の塑性化を引き起こす主要な応力成分であり、座屈は材料強度とは無関係に変位の増大を引き起こし構造物に損傷を与える。両者は曲面構造の崩壊を考える上で、それぞれ材料非線形性と幾何学的非線形性という二つの力学的側面から評価するための良い指標になりえるものである。これら力学応答をそれぞれ目的関数として与え、制約条件は幾何学的な条件のみを考慮する。このような単純な問題により得られる最適解の力学性状を詳細に調査することで、曲面形状がこれらの力学応答に与える影響を把握することに主眼を置く。

本論文の目的は、最適設計システムの構築ではなく、理想化された比較的シンプルな構造モデルを用いて、曲面形状と応答の関係性や力学に形状決定を行った場合の効果を調査することである。上述の二つの目的関数は設計目標というよりむしろ、形状と応答の関係性を調査するために便宜上与えた変分問題の汎関数であり、この強い非線形問題を解く為に最適化手法を利用すると捉えても良い。このような意味において、ここで扱う内容は最適設計問題ではなく、数値実験による力学的調査であり、形態解析³⁰⁾として位置づけられる。

先に示したように、既往の研究においても最適化手法を用いて曲面構造の形状決定を行った研究は多く、ここで扱う問題に類似したものも幾つか見られる。しかし曲面構造の最適化問題は、モデルの単純な古典的な解析的研究を除けば、通常は強い非線形問題であるため、最適解はそれぞれ問題に対してひとつの解が得られ、最適解がもつ共通の力学的性質が明らかになるわけではない（ただし、最適解群を生成するようなパラメトリック最適化法がある）。この為、多くの研究者や技術者によって同様の問題が解かれることは重要であると考えられる。

ただし、本研究で扱う二つの問題に新規性が無いわけではない。既往の研究との違いを明確にすれば、その位置付けは次のとおりである。

曲げモーメント分布最小曲面

自重に対し曲げモーメントを発生しない形状が、曲面構造の理想的な形態のひとつとして多くの

文献に記述されている。しかし、実際にはそのような曲面を解析的に求めた研究は著者の知る限りない。剛性の高い形状を得ることを目的とした歪エネルギー最小化による最適化研究^{14) 16)}では、結果として曲げモーメントの発生が抑えられた形態が得られるものと予測できる。しかし、文献中に曲げ応力の分布が記載されたものはなく、この種の曲面の力学的性質を直接的に議論したものは見当たらない。本研究では、曲面に発生する曲げモーメント分布を直接的に最小化する方法を試み、この曲面の力学的性質について調査する。

座屈荷重最大曲面

座屈荷重を目的関数とした最適化研究はいくつか見られるが、扱われている問題は軸圧縮力を受ける円筒シェルなど、座屈前変形を伴わない特別なケースが殆どである。曲面形状を設計変数とする場合、一般には座屈前変形を伴う問題となり、その定式化は煩雑となる。また先に述べたように、座屈荷重を目的関数として最適化を行った場合、最適解では座屈荷重が重複する傾向がある。この傾向は、感度解析に基づく数理計画法を用いた場合、解を求めることを困難なものとする。このため、厳密に非線形座屈荷重を最大化した曲面構造の形状最適化研究は、既往のものには見つからない。本研究ではこの問題をできる限り精度良く解くことを試み、この曲面の力学的性質について調査する。ただし、この研究では鉄骨シェルのみを解析対象としている。

以上の問題から得られた知見をもとに、力学的に曲面形状を決定することの意義や可能性について議論する。

論文の主旨に従い、設定した問題の厳密な最適解を求めることを重視している。非線形方程式を解くという立場から、最適化手法には、制約付き非線形計画問題に対し、現在最も有効な手法の一つである逐次二次計画法を採用し、何れの問題に対しても最適性条件を満たすことを確認して解を求める。感度解析は全て直接微分法に従い、差分などの近似手法の使用は避けた。

論文の構成

本論文は、第Ⅰ部と第Ⅱ部から成る。第Ⅰ部では曲げモーメント分布を、第Ⅱ部では座屈荷重をそれぞれ目的関数とした曲面構造の形状最適化問題が扱われる。

第Ⅰ部の構成は以下のとおりである。

1章は、曲げモーメントの発生を極力抑えた曲面形状を得るための形状決定法が定式化される。曲面形状を設計変数とし、表面積一定の条件のもとで、曲げモーメント分布を最小二乗法により最小化する最適化問題として扱われる。最適化手法には逐次二次計画法が適用される。曲面は有限要素法によって離散化され、曲げモーメントの節点座標に対する感度が定式化される。

2章は、1章で示した形状決定法の具体的な適用例として、軸対称シェルの問題が扱われる。外

力に自重、積雪、風荷重が与えられた場合の最適形状が示される。これらの結果を通して、手法の有効性が確認されるとともに、この種の曲面における幾つかの力学的特性が明らかにされる。

3章では、1章の方法をより自由な形状を持つシェル構造物に適用するために、曲面の表現にベジエ曲面が利用され、応答計算に三角形平板要素が採用される。Islerのシェルに見られるような、自由端部を有し、曲面の数箇所で点支持される形式のシェルに対して、曲げモーメント分布を最小とする形状最適化が行われる。

4章は、曲面を直線材で構成したスペースフレームの問題が扱われる。部材の接合部を表す節点の座標を設計変数として、部材に発生する曲げモーメント及び振りモーメントの分布を最小化する。数値解析例を通して手法の有効性が確認されるとともに、解析結果から、スペースフレームの場合には曲面形状以外に曲面の分割パターンが、曲げモーメントの発生に大きく寄与していることが明らかになる。

5章は、第I部の各章で得られた知見をまとめて述べている。

第II部の構成は以下のとおりである。

1章は、座屈荷重を最大とするアーチの形状最適化問題が扱われる。アーチ形状と外力分布はともに左右対称とし、座屈前変形を伴う対称分岐型の座屈が対象とされる。アーチ断面を一様とし、アーチ長さ一定の制約条件が与えられる。幾何学的非線形解析では、最適化過程の不整形な形状に対しても精度良く座屈荷重を評価するために、移動座標系による定式化が行われる。また、分岐座屈荷重の感度解析では、構造形状の対称性を考慮した定式化が示される。数値解析例では、固定支持の場合、境界付近で曲線の勾配が零となるような最適形状が得られることが示される。また、これらの最適形状に対して不整感性などの幾つかの力学的性質が調査される。

2章は、二方向格子シェルを解析対象として座屈荷重の最大化問題が扱われる。この問題では最適解で座屈荷重の重複を生じるため、最適化の方法が検討される。非線形座屈荷重を重複を考慮しながら厳密に最大化することは困難であるため、指定変位ノルムをもつ釣合点で、固有値解析によって座屈前変形を近似的に評価する方法とその感度解析手法が提案される。数値解析例では、座屈荷重のほぼ重複した結果が示され、手法の有効性が確認される。また、この最適形状の形状初期不整に対する影響が調査され、不整感性を有することが確認される。

3章は、最適解で座屈荷重の重複する最適化問題を解く新しい方法として、構造物の対称性を利用する方法が検討される。ただし、基礎的な検討を行うために最適化問題は単純なものとし、単層トラスドームの線形座屈問題が扱われる。対称性を数学的に扱う群論の知識を援用して、各々の座屈荷重は座屈モードのもつ対称性に従った分類がされる。この分類を利用して、最適化より生ずる座屈荷重の重複のメカニズムと座屈荷重重複時の感度が詳細に調査される。その結果、最適化よって生ずるのは主に異なる対称成分における重複であり、単根の固有値感度式を用いて重複座屈荷重

の感度を評価することが可能であることが示される。対称性を利用した最適化方法と例題が示され、手法の有効性が確認される。

4章は、第Ⅱ部の各章で得られた知見をまとめて述べている。

最後に第Ⅰ部、第Ⅱ部で得られた知見を総括し、本論文の結論としている。

第 I 部

応力分布を目的関数とする曲面構造の形状最適化

曲面構造の理想的な形態のひとつとして、外力に対し曲げモーメントを発生しない形態を考えることができる。曲げモーメントは材料の塑性化を引き起こす主要な応力成分であり、この発生を抑えた形態は、材料破壊によってメカニズムを形成するような崩壊に対し、高い耐力を期待できる。

第 I 部は、曲げモーメントの発生を極力抑えた曲面形状を求める方法として、曲面形状を未知関数とし、曲面の表面積を一定とする条件の下で曲げモーメントの分布を最小二乗法により直接的に最小化する方法を提案する。曲面は有限要素法により離散化し、節点座標を設計変数とした形状最適化問題として扱う。提案手法を様々な曲面構造の問題に適用し、具体的な数値解析例を示すことで、手法の有用性を実証する。また、例題で得られた最適形状の力学性状を詳細に調査し、この種の曲面に固有の力学的性質の幾つかを明らかにする。

1. 曲げモーメントフリー曲面形状決定問題の定式化

1.1 はじめに

本章は、曲げモーメントの発生を極力抑えた曲面形状を数値解析的に求めるための方法として、曲面形状を未知関数とし、曲面の表面積を一定とする条件の下で曲げモーメントの分布を最小二乗法により直接的に最小化する方法を提案する。まず有限要素法の使用を前提とした統括的な最適化問題の設定を行い、次に、適用される最適化手法の概要と、曲げモーメント分布の節点座標に対する感度の定式を示す。

1.2 目的関数

曲面構造の線形静的解析には有限要素法を使用する。曲面は離散化され、 N 個の節点と M 個の要素によって表現されるものとする。曲面形状を表現する節点のうち、座標の拘束された境界節点を除いた節点の数を N_r 個とし、これら節点の位置ベクトルを $\mathbf{r}_i = [r_{xi} \ r_{yi} \ r_{zi}]^T$ ($i = 1, \dots, N_r$) のように表す。曲面の任意の形状は節点位置ベクトル $\mathbf{r} = [\mathbf{r}_1^T, \dots, \mathbf{r}_{N_r}^T]^T$ によって表現される。曲面に分布する断面力を最小二乗法の意味で最小化することを考える。断面力として曲げモーメント及びねじりモーメントを考えるとすれば、目的関数 f は次式のように表現することができる。

$$\text{Objective Function} \quad f(\mathbf{r}) = \sum_{e=1}^M \int_{S_e} (M_\alpha^2 + M_\beta^2 + M_{\alpha\beta}^2) dS \quad \rightarrow \text{Minimize} \quad (1-1)$$

ここに S_e は一要素の面積を表す。 α, β は要素毎の曲線座標を表しており、 M_α, M_β はそれぞれ要素 e における α, β 方向の曲げモーメントを、 $M_{\alpha\beta}$ はねじりモーメントを表す。

(1-1)式の目的関数を、有限要素法における一般的なマトリクス表記に従って表す。変位法による有限要素法の使用を考えており、要素内の任意点における変位ベクトル \mathbf{u} は、通常、要素節点変位ベクトル \mathbf{d} を用いて多項式により補間され、次式のように表される。

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} \quad (1-2)$$

ここに、 \mathbf{N} は形状関数を表す。歪と変位の関係は、上式を考慮して次の形式で表現される。

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{N}\mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{d} \quad (1-3)$$

ここに \mathbf{A} は歪と変位を関係付ける行列であり、一般には座標成分に関する微分演算子から構成される。 \mathbf{B} は歪-変位行列を表す。要素内任意点における断面力（合応力） $\boldsymbol{\sigma}$ は、上式を考慮し次式のように表される。

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{d} \quad (1-4)$$

ここに \mathbf{D} は、構成則を表す行列である。上式の関係式から、断面力のうち曲げモーメント、ねじりモーメントに対応する部分のみを考慮し、次式のように表す。

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} M_\alpha & M_\beta & M_{\alpha\beta} \end{bmatrix}^T = \mathbf{D}^* \mathbf{B}^* \mathbf{d} \quad (1-5)$$

ここに \mathbf{D}^* , \mathbf{B}^* は、 \mathbf{D} 及び \mathbf{B} の曲げモーメント、ねじりモーメントに対応する部分行列を表している。

上式を(1-1)式に代入することで、目的関数 f は次式のように表される。

$$f = \sum_{e=1}^M \mathbf{d}^T \mathbf{G} \mathbf{d} \quad (1-6)$$

ここに、

$$\mathbf{G} = \int_{S_e} \mathbf{B}^{*T} \mathbf{D}^{*T} \mathbf{D}^* \mathbf{B}^* dS \quad (1-7)$$

本問題は、曲面を構成する節点位置ベクトル \mathbf{r} に関して、(1-6)式を最小化する問題として扱われる。

1.3 制約条件の導入

非線形計画法を用いて最小解の探索を行うに当たって、探索空間を狭め解析効率を向上させるとともに、初期解近傍の現実的な解を得るために、制約条件を導入する。ここでは、幾何学的な拘束条件として、曲面中立面の表面積の値を指定する制約条件を与える。問題は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \text{Objective Function} \quad f(\mathbf{r}) &= \sum_{e=1}^M \mathbf{d}^T \mathbf{G} \mathbf{d} && \rightarrow \text{Minimize} \\ \text{Subject to} \quad \mathbf{c}(\mathbf{r}) &= \sum_{e=1}^M S_e - S_0 = 0 && (1-8) \end{aligned}$$

ここに、 S_0 は指定する表面積を表す。

本論文の中では曲面形状に着目しているため、シェル厚さは一定とする。この場合、(1-8)式の制約条件は構造材の体積を一定とする制約条件を意味する。

1.4 最適性必要条件

問題(1-8)式に対する Lagrange 関数を次式のように定義する。

$$L(\mathbf{r}, \mu) = f(\mathbf{r}) + \mu \mathbf{c}(\mathbf{r}) = \sum_{e=1}^M \mathbf{d}^T \mathbf{G} \mathbf{d} + \mu \left(\sum_{e=1}^M S_e - S_0 \right) \quad (1-9)$$

ここに μ は Lagrange 乗数を表す。上式を \mathbf{r} 及び μ で偏微分することで、問題(1-8)式の最適性必要条件 (Karush-Kuhn-Tucker 条件) は次式で表すことができる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial L(\mathbf{r}, \mu)}{\partial r_{\alpha i}} &= \sum_{e=1}^M \left(\frac{\partial \mathbf{d}^T}{\partial r_{\alpha i}} \mathbf{G} \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial r_{\alpha i}} \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{G} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial r_{\alpha i}} \right) + \mu \sum_{e=1}^M \frac{\partial S_e}{\partial r_{\alpha i}} = 0 \quad (\alpha = x, y, z)(i = 1, \dots, N_r) \\ \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mu)}{\partial \mu} &= \sum_{e=1}^M S_e - S_0 = 0\end{aligned}\quad (1-10)$$

また、上式を次式のように表しておく。

$$\nabla L(\mathbf{r}, \mu) = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{r}} L(\mathbf{r}, \mu) \\ \nabla_{\mu} L(\mathbf{r}, \mu) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f(\mathbf{r}) + \mu \nabla c(\mathbf{r}) \\ c(\mathbf{r}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 0 \end{bmatrix}\quad (1-11)$$

ここに、

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{r}} L(\mathbf{r}, \mu) &= \left[\frac{\partial L(\mathbf{r}, \mu)}{\partial r_{x1}}, \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mu)}{\partial r_{y1}}, \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mu)}{\partial r_{z1}}, \dots, \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mu)}{\partial r_{xN_r}}, \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mu)}{\partial r_{yN_r}}, \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mu)}{\partial r_{zN_r}} \right]^T \\ \nabla_{\mu} L(\mathbf{r}, \mu) &= \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mu)}{\partial \mu} \\ \nabla f(\mathbf{r}) &= \left[\frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r_{x1}}, \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r_{y1}}, \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r_{z1}}, \dots, \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r_{xN_r}}, \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r_{yN_r}}, \frac{\partial f(\mathbf{r})}{\partial r_{zN_r}} \right]^T \\ \nabla c(\mathbf{r}) &= \left[\frac{\partial c(\mathbf{r})}{\partial r_{x1}}, \frac{\partial c(\mathbf{r})}{\partial r_{y1}}, \frac{\partial c(\mathbf{r})}{\partial r_{z1}}, \dots, \frac{\partial c(\mathbf{r})}{\partial r_{xN_r}}, \frac{\partial c(\mathbf{r})}{\partial r_{yN_r}}, \frac{\partial c(\mathbf{r})}{\partial r_{zN_r}} \right]^T\end{aligned}\quad (1-12)$$

である。

本問題は、(1-10)式を満たす節点位置ベクトル \mathbf{r} 及び μ を求める問題として扱われる。問題は制約つき非線形計画問題であり、最適化手法には逐次二次計画法 (SQP 法)⁶⁾を採用する。

1.5 逐次二次計画法⁶⁾

1.5.1 部分二次計画問題

逐次二次計画法では、非線形計画問題を二次計画問題で近似し、反復計算によって求める解に収束させる。(1-8)式の目的関数を $\mathbf{r} = \mathbf{r}^{(k)}$ (第 k 反復)において2次関数に近似し、(1-8)式の制約条件を1次関数に近似した部分二次計画問題として次のように表す。

$$\begin{aligned}\text{Objective Function} \quad & f(\mathbf{r}^{(k)}) + \nabla f(\mathbf{r}^{(k)})^T \Delta \mathbf{r} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{r}^T \mathbf{B}^{(k)} \Delta \mathbf{r} \quad \rightarrow \text{Minimize} \\ \text{Subject to} \quad & c(\mathbf{r}^{(k)}) + \nabla c(\mathbf{r}^{(k)})^T \Delta \mathbf{r} = 0\end{aligned}\quad (1-13)$$

ここに $\Delta \mathbf{r}$ は $\mathbf{r}^{(k)}$ からの変化を表わしている。 $\mathbf{B}^{(k)}$ は、後述するように、(1-9)式の Lagrange 関数 $L(\mathbf{r}, \mu)$ のヘッセ行列を近似したマトリクスである。

$\Delta \mathbf{r}$ を未知量とし、(1-13)式の部分問題に対して改めて Lagrange 乗数法を適用し、最適性必要条件を求めると次式が得られる。

$$\nabla f(\mathbf{r}^{(k)}) + \mathbf{B}^{(k)} \Delta \mathbf{r} + \mu \nabla c(\mathbf{r}^{(k)}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{c}(\mathbf{r}^{(k)}) + \nabla c(\mathbf{r}^{(k)})^T \Delta \mathbf{r} = 0 \quad (1-14)$$

ここで、 $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \mathbf{r}^{(k)}$, $\mu = \mu^{(k+1)}$, $\Delta \mu = \mu^{(k+1)} - \mu^{(k)}$ とおき、上式を整理すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{B}^{(k)} & \nabla c(\mathbf{r}^{(k)}) \\ \nabla c(\mathbf{r}^{(k)})^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{r} \\ \Delta \mu \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla L_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}^{(k)}, \mu^{(k)}) \\ c(\mathbf{r}^{(k)}) \end{bmatrix} \quad (1-15)$$

(1-15)式は $\Delta \mathbf{r}$, $\Delta \mu$ に関する連立一次方程式であり、(1-13)式で表される部分問題の最適解は、これを解くことで直接的に求めることができる。 $\Delta \mathbf{r} \simeq 0$ の解が得られた場合、(1-14)式は(1-11)式の最適性条件と等しくなるため、求める最適解が得られたものとして反復計算を終了する。 $\Delta \mathbf{r} \neq 0$ の場合は、 $\Delta \mathbf{r}$ を \mathbf{r} の修正方向として次反復の $\mathbf{r}^{(k+1)}$ を決定し、再び(1-13)式の部分問題を解くことになる。

一方、非線形方程式の解法としてよく用いられる Newton Raphson 法を、(1-11)式の最適性必要条件式に直接適用した場合、その反復公式は次式のように表すことができる。

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{r}}^2 L(\mathbf{r}^{(k)}, \mu^{(k)}) & \nabla c(\mathbf{r}^{(k)}) \\ \nabla c(\mathbf{r}^{(k)})^T & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{r} \\ \Delta \mu \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla L_{\mathbf{r}}(\mathbf{r}^{(k)}, \mu^{(k)}) \\ c(\mathbf{r}^{(k)}) \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

ここに、

$$\nabla_{\mathbf{r}}^2 L(\mathbf{r}, \mu) = \begin{bmatrix} \partial^2 L(\mathbf{r}, \mu) / \partial r_{x_1} \partial r_{x_1} & \partial^2 L(\mathbf{r}, \mu) / \partial r_{x_1} \partial r_{y_1} & \partial^2 L(\mathbf{r}, \mu) / \partial r_{x_1} \partial r_{z_1} & \cdots & \partial^2 L(\mathbf{r}, \mu) / \partial r_{x_1} \partial r_{z_{N_r}} \\ \partial^2 L(\mathbf{r}, \mu) / \partial r_{y_1} \partial r_{x_1} & \partial^2 L(\mathbf{r}, \mu) / \partial r_{y_1} \partial r_{y_1} & \partial^2 L(\mathbf{r}, \mu) / \partial r_{y_1} \partial r_{z_1} & \cdots & \partial^2 L(\mathbf{r}, \mu) / \partial r_{y_1} \partial r_{z_{N_r}} \\ \partial^2 L(\mathbf{r}, \mu) / \partial r_{z_1} \partial r_{x_1} & \partial^2 L(\mathbf{r}, \mu) / \partial r_{z_1} \partial r_{y_1} & \partial^2 L(\mathbf{r}, \mu) / \partial r_{z_1} \partial r_{z_1} & \cdots & \partial^2 L(\mathbf{r}, \mu) / \partial r_{z_1} \partial r_{z_{N_r}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^2 L(\mathbf{r}, \mu) / \partial r_{z_{N_r}} \partial r_{x_1} & \partial^2 L(\mathbf{r}, \mu) / \partial r_{z_{N_r}} \partial r_{y_1} & \partial^2 L(\mathbf{r}, \mu) / \partial r_{z_{N_r}} \partial r_{z_1} & \cdots & \partial^2 L(\mathbf{r}, \mu) / \partial r_{z_{N_r}} \partial r_{z_{N_r}} \end{bmatrix} \quad (1-17)$$

(1-15)式と(1-16)式を比較すると、 $\mathbf{B}^{(k)} = \nabla_{\mathbf{r}}^2 L(\mathbf{r}^{(k)}, \mu^{(k)})$ の時、解法は Newton Raphson 法と一致することがわかる。即ち、適当な方法によりヘッセ行列 $\nabla_{\mathbf{r}}^2 L(\mathbf{r}^{(k)}, \mu^{(k)})$ を近似した $\mathbf{B}^{(k)}$ を作成することによって、Newton Raphson 法のような超 1 次収束性が得られる。

1.5.2 BFGS 公式の適用

$\mathbf{B}^{(k)}$ は正定値マトリクスであると同時にヘッセ行列 $\nabla_{\mathbf{r}}^2 L(\mathbf{r}^{(k)}, \mu^{(k)})$ をよく近似していることが望ましい。制約なし非線形最適化に対する Quasi-Newton 法の考え方をを用いて、以下に示すような $\mathbf{B}^{(k)}$ の更新方法が提案されている。まず、(1-13)式の二次計画問題を解いて得られる $\Delta \mathbf{r}$, $\Delta \mu$ を用いて、次反復における点を次のように定める。

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} + t \Delta \mathbf{r}, \quad \mu^{(k+1)} = \mu^{(k)} + \Delta \mu \quad (1-18)$$

ここに、 t は \mathbf{r} の修正幅を調整するパラメータであり、具体的な定め方は後に示す。

次に、

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}^{(k+1)} - \mathbf{r}^{(k)}, \quad \mathbf{y} = \nabla_{\mathbf{r}} L(\mathbf{r}^{(k+1)}, \mu^{(k+1)}) - \nabla_{\mathbf{r}} L(\mathbf{r}^{(k)}, \mu^{(k+1)}) \quad (1-19)$$

と表現し、Quasi-Newton 法の BFGS 公式を適用して、次式のように $\mathbf{B}^{(k)}$ を更新する。

$$\mathbf{B}^{(k+1)} = \mathbf{B}^{(k)} + \frac{1}{\beta} \mathbf{y}\mathbf{y}^T - \frac{1}{\gamma} \mathbf{B}^{(k)} \mathbf{s}\mathbf{s}^T \mathbf{B}^{(k)} \quad (1-20)$$

ここに、

$$\beta = \mathbf{y}^T \mathbf{s}, \quad \gamma = \mathbf{s}^T \mathbf{B} \mathbf{s}$$

である。 $\mathbf{B}^{(k)}$ が正定値であり、かつ $\beta > 0$ であれば、 $\mathbf{B}^{(k+1)}$ は正定値となる。制約なしの問題では大半の場合 $\beta > 0$ が成立する。しかし、Lagrange 関数に対して(1-19)式のように BFGS 公式を適用した場合、 $\beta > 0$ が成り立たないことがしばしば起こる。このような場合、 $\mathbf{B}^{(k+1)}$ の正定値性を保証するために次のような条件式を付加して修正を行う。

$$\theta = \begin{cases} 1 & (\mathbf{s}^T \mathbf{y} \geq 0.2 \mathbf{s}^T \mathbf{B} \mathbf{s} \text{ のとき}) \\ 0.8 \mathbf{s}^T \mathbf{B} \mathbf{s} / (0.8 \mathbf{s}^T \mathbf{B} \mathbf{s} - \mathbf{s}^T \mathbf{y}) & (\mathbf{s}^T \mathbf{y} < 0.2 \mathbf{s}^T \mathbf{B} \mathbf{s} \text{ のとき}) \end{cases} \quad (1-21)$$

とおき、この θ を用いて次式のようなベクトル $\bar{\mathbf{y}}$ を定義する。

$$\bar{\mathbf{y}} = \theta \mathbf{y} + (1 - \theta) \mathbf{B} \mathbf{s} \quad (1-22)$$

(1-20)式の \mathbf{y} を上式の $\bar{\mathbf{y}}$ に置き換えた公式により、 $\mathbf{B}^{(k)}$ の更新を行う。このように更新された $\mathbf{B}^{(k+1)}$ は、 $\mathbf{B}^{(k)}$ が正定値であるならば常に正定値であることが数学的に証明される。

1.5.3 直線探索法

これまでに示した方法だけでは、局所的な収束性しかもたないので、収束解を得るには最適解に十分に近い初期値を与えなくてはならない。この為、どのような初期値を用いても何らかの(局所)最適解が得られるように、以下に示すような直線探索法が導入される。

(1-13)式の二次計画問題を解いて得られた $\Delta \mathbf{r}$ が $\Delta \mathbf{r} \neq \mathbf{0}$ であった場合、ベクトル $\Delta \mathbf{r}$ を探索方向として(1-18)式のように $\mathbf{r}^{(k+1)}$ を決定する。この時、問題の最適解に近づくようにパラメータ t を決める必要があるが、Lagrange 関数 $L(\mathbf{r}, \mu)$ には Lagrange 乗数 μ と未知変数 \mathbf{r} との間に双対定理が存在するため、問題の達成度合いを測る尺度としては扱いにくい。そこで、次式に示すペナルティ関数 $F_p(\mathbf{r})$ を新たに定義する。

$$F_p(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}) + p|c(\mathbf{r})| \quad (1-23)$$

ここに、 p はペナルティパラメータを表し、 $p > |\mu|$ であるような十分大きな正の値である。上式の値が小さいほど、問題の最適解に近いことが期待できる。

ペナルティパラメータ p が十分大きな値であり、 $\mathbf{B}^{(k)}$ が正定値対称であるとき、(1-13)式の問題の最適解 $\Delta \mathbf{r}$ は点 $\mathbf{r}^{(k)}$ における関数 F_p の降下方向となることが知られている。従って $\Delta \mathbf{r}$ 方向に直線探索を行うことによって、次式を満たす修正幅 $t > 0$ を見つけることができる。

$$F_p(\mathbf{r}^{(k)} + t\Delta \mathbf{r}) < F_p(\mathbf{r}^{(k)}) \quad (1-24)$$

上式を満たす修正幅 t を求め、(1-18)式により $\mathbf{r}^{(k)}$, $\mu^{(k)}$ を更新して(1-13)式の部分問題を再び解く。

本論文の解析では、ペナルティパラメータ p の初期値を 0.5 とし、直線探索を行う前に、次式に従って更新するものとした。

$$p = \begin{cases} |\mu^{(k+1)}| + 0.1 & p < |\mu^{(k+1)}| \text{ のとき} \\ p & \text{それ以外} \end{cases} \quad (1-25)$$

また、(1-24)式を満たす t の求め方は、初期値として $t=1$ とし、(1-24)式を満たさない場合は、 t を $0.5t$ で置き換えて再計算を行い、(1-24)式が満たされるまでこれを繰り返すことで、容易に求められる。効率良く t を求める方法については文献 6) を参照されたい。

1.6 感度解析

Lagrange関数の勾配ベクトルを作成するにあたり、有限要素法における各種マトリクスに対して節点座標ベクトル \mathbf{r} に関する微分マトリクスが必要となる。節点座標の関数となっているのは、主に要素の長さや面積を含むマトリクスや座標変換マトリクスである。

要素 e を構成する節点の集合を E と表現する。要素 e におけるマトリクス \mathbf{G} の節点位置ベクトル成分 $r_{\alpha i}$ ($\alpha = x, y, z$), ($i = 1, \dots, N_r$) による導関数は、(1-7)式より、次のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial r_{\alpha i}} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial r_{\alpha i}} \int_{s_e} \mathbf{B}^* \mathbf{D}^* \mathbf{D}^* \mathbf{B}^* dS & (i \in E) \\ 0 & (i \notin E) \end{cases} \quad (1-26)$$

実際に何らかの有限要素を適用して、上式を具体的に求める際には、積分範囲が節点座標の関数となっていることに注意する。

要素 e に対応する要素節点変位ベクトル \mathbf{d} は、節点位置ベクトル \mathbf{r} の陰関数であり、構造物全体の釣合方程式から求められる。有限要素法による離散系の釣合方程式は一般に次の形式で表すことができる。

$$\mathbf{K} \bar{\mathbf{D}} = \bar{\mathbf{F}} \quad (1-27)$$

ここに \mathbf{K} は剛性マトリクス、 \mathbf{D} は変位ベクトル、 \mathbf{F} は外力ベクトルを表し、 $\bar{\quad}$ は全体座標系で表現されていることを意味する。 $\bar{\mathbf{D}}$ から要素を構成している節点の変位ベクトル成分を抜き出すことで、全体座標系における要素節点変位ベクトル $\bar{\mathbf{d}}$ が得られる。要素座標系における節点変位ベクトル \mathbf{d} は $\bar{\mathbf{d}}$ を座標変換することで、次式のように表せる。ただし、 \mathbf{T} は座標変換マトリクスを表す。

$$\mathbf{d} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{d}} \quad (1-28)$$

要素節点変位ベクトル \mathbf{d} の節点位置ベクトル成分 $r_{\alpha i}$ による導関数は、上式を微分することで次式のように表される。

$$\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial r_{\alpha i}} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial r_{\alpha i}} \bar{\mathbf{d}} + \mathbf{T} \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}}{\partial r_{\alpha i}} & (i \in E) \\ \mathbf{T} \frac{\partial \bar{\mathbf{d}}}{\partial r_{\alpha i}} & (i \notin E) \end{cases} \quad (1-29)$$

上式中に含まれる $\partial \bar{\mathbf{d}} / \partial r_{\alpha i}$ は、次のように求めることができる。

(1-27)式の釣合方程式が恒等的に成り立つものとする。(1-27)式を $r_{\alpha i}$ で微分すると次式となる。

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{K}}}{\partial r_{\alpha i}} \bar{\mathbf{D}} + \bar{\mathbf{K}} \frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial r_{\alpha i}} = \frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial r_{\alpha i}}$$

上式を整理すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{D}}}{\partial r_{\alpha i}} = \bar{\mathbf{K}}^{-1} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{F}}}{\partial r_{\alpha i}} - \frac{\partial \bar{\mathbf{K}}}{\partial r_{\alpha i}} \bar{\mathbf{D}} \right) \quad (1-30)$$

上式の $\partial \bar{\mathbf{D}} / \partial r_{\alpha i}$ から要素を構成する節点に対応する成分を抜き取ることで、 $\partial \bar{\mathbf{d}} / \partial r_{\alpha i}$ が得られる。このような変位感度の求め方は、直接微分法⁷⁾と呼ばれる。釣合方程式は、全節点座標の関数となっているため、要素 e 上にない節点からも $\partial \bar{\mathbf{d}} / \partial r_{\alpha i}$ は影響を受ける。

(1-30)式中の $\partial \bar{\mathbf{K}} / \partial r_{\alpha i}$ は次のように求められる。全体座標系で表現される要素剛性マトリクス $\bar{\mathbf{k}}$ は、次式によって表される。

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T} = \mathbf{T}^T \left(\int_{S_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dS \right) \mathbf{T} \quad (1-31)$$

$\bar{\mathbf{k}}$ の $r_{\alpha i}$ による導関数は、上式を微分することで次のように表される。

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{k}}}{\partial r_{\alpha i}} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{T}^T}{\partial r_{\alpha i}} \left(\int_{S_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dS \right) \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \left(\frac{\partial}{\partial r_{\alpha i}} \int_{S_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dS \right) \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \left(\int_{S_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dS \right) \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial r_{\alpha i}} & (i \in E) \\ 0 & (i \notin E) \end{cases} \quad (1-32)$$

上式を全ての要素について重ね合わせることで、 $\partial \bar{\mathbf{K}} / \partial r_{\alpha i}$ が得られる。

(1-30)式中の $\partial \bar{\mathbf{F}} / \partial r_{\alpha i}$ は次のように求められる。自重などの分布外力は、等価節点力として与えるものとする。この場合、全体座標系で表される要素節点力ベクトル $\bar{\mathbf{f}}$ は次式により表される。

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{q} dS \quad (1-33)$$

ここに、 \mathbf{q} は分布外力を表すベクトルである。

上式を $r_{\alpha i}$ で微分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial r_{\alpha i}} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{T}^T}{\partial r_{\alpha i}} \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{q} dS + \mathbf{T}^T \frac{\partial}{\partial r_{\alpha i}} \int_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{q} dS & (i \in E) \\ \mathbf{0} & (i \notin E) \end{cases} \quad (1-34)$$

上式を全ての要素に対して重ね合わせを行うことで $\partial \bar{\mathbf{F}} / \partial r_{\alpha i}$ が得られる。

1.7 解析手順

最適化の計算手順をまとめると、次のようになる。

Step 1 初期形状 $\mathbf{r}^{(0)}$ 、指定表面積 S_0 、材料定数を与える（SQP法に利用されるパラメータの初期値は、 $\mu=0.01, \mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{I}, \rho=0.5$ とする）。

Step 2 線形静的解析を行い、(1-9)式の Lagrange 関数 $L(\mathbf{r}^{(k)}, \mu^{(k)})$ を評価する。

Step 3 感度解析を行い、(1-11)式で表される Lagrange 関数の勾配ベクトル $\nabla L(\mathbf{r}^{(k)}, \mu^{(k)})$ を評価する。この時、 $\|\nabla L(\mathbf{r}^{(k)}, \mu^{(k)})\| \simeq 0$ であれば、求める解が得られているものとして終了する。

Step 4 部分二次計画問題(1-15)式を解き、 $(\Delta \mathbf{r}, \Delta \mu)$ を求める。

Step 5 $\mu^{(k+1)} = \mu^{(k)} + \Delta \mu$ とおき、(1-25)式に従って p を更新する。

Step 6 方向 $\Delta \mathbf{r}$ に対して直線探索を行い、(1-24)式を満たす t を求め、 $\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} + t\Delta \mathbf{r}$ とおく。

Step 7 (1-20)式に従って、 $\mathbf{B}^{(k)}$ を更新する。 $k = k + 1$ とおき直し、Step 2 に戻る。

1.8 1章のまとめ

曲げモーメントの発生を極力抑えた曲面形状を数値解析的に求めるための方法を示した。曲面を有限要素法により離散化し、節点座標を設計変数として表面積一定の条件のもとで曲げモーメント分布を最小二乗法により最小化する最適化問題として定式した。最適化手法に採用される逐次二次計画法の概要を示し、曲げモーメント分布の節点座標に対する感度の定式を示した。

2. 軸対称シェルの形状最適化

2.1 はじめに

本章では前章で示した形状決定法の具体的な適用例として、軸対称シェルの形状最適化問題を扱う。まず、軸対称シェル要素による線形静的問題における釣合方程式の定式を示し、その後にこの要素を用いた最適化問題の定式を示す。数値解析では、自重、その他数種類の軸対称、非軸対称荷重が作用した場合の曲げモーメント分布を最小とする曲面形状が示される。

2.2 軸対称シェル要素による定式化

2.2.1 釣合方程式⁸⁾

ドーム状の境界が円形平面形状である曲面の形状最適化を行うために、軸対称シェル要素による定式化を行う。形状、外力がともに軸対称な場合には、変位や応力は周方向変化しないため、問題は一次元的な扱いとなる。ここでは、非軸対称な外力に対しても応力算定を可能とするために、外力及び変位を周方向にFourier級数展開し、周方向に対して変数分離された釣合方程式を導く。ただし、要素の形状は常に軸対称のままであり、最適化によって非軸対称な形状が得られることはない。ここで扱う形状最適化問題は、曲面が軸対称な形状であるという幾何学的な拘束条件下で、曲げモーメント分布を最小化する問題として扱われる。

要素は、面内変位一次、面外変位三次の内挿関数とする円錐台要素を採用する (Fig.2-1)。シェル中央面の節点*i*における変位及び外力を、Fourier級数展開し、次式のように表現する。

$$u_i = \sum_{n=0}^{N_w} u_{in}(s) \cos n\theta \quad v_i = \sum_{n=1}^{N_w} v_{in}(s) \sin n\theta \quad w_i = \sum_{n=0}^{N_w} w_{in}(s) \cos n\theta \quad \beta_i = \sum_{n=0}^{N_w} \beta_{in}(s) \cos n\theta \quad (2-1)$$

$$V_i = \sum_{n=0}^{N_w} V_{in}(s) \cos n\theta \quad T_i = \sum_{n=1}^{N_w} T_{in}(s) \sin n\theta \quad H_i = \sum_{n=0}^{N_w} H_{in}(s) \cos n\theta \quad M_i = \sum_{n=0}^{N_w} M_{in}(s) \cos n\theta \quad (2-2)$$

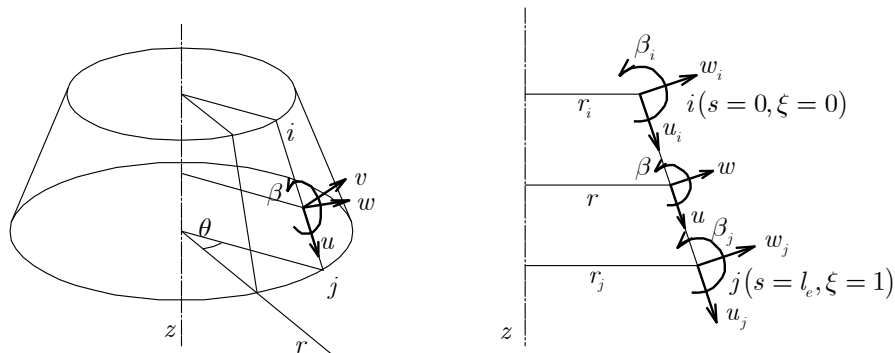


Fig.2-1 軸対称シェル要素 (円錐台要素)

ここに u_i, V_i は経線方向成分、 v_i, T_i は周方向成分、 w_i, H_i は法線方向成分のそれぞれ変位及び外力、 β_i, M_i は経線方向の回転角及びモーメントを表す。 N_w はFourier級数の展開項数を表す。節点 j の諸量についても同様にFourier級数展開する。

要素内におけるシェル中央面の変位分布を、面内変位 u, v を経線方向の要素座標 s の一次式、法線方向の変位 w を s の三次式として、次式のように仮定する。

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{d} \quad (2-3)$$

ここに、

$$\mathbf{u} = [u \quad v \quad w \quad \beta]^T, \mathbf{d} = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \beta_i \quad u_j \quad v_j \quad w_j \quad \beta_j]^T$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 & 0 & \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & lA_3 & 0 & 0 & A_7 & -lA_6 \\ 0 & 0 & -6A_3/l & A_5 & 0 & 0 & 6A_3/l & -A_4 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = 1 - \xi, A_2 = 1 - 2\xi, A_3 = \xi - \xi^2, A_4 = 2\xi - 3\xi^2, A_5 = 1 - 4\xi + 3\xi^2,$$

$$A_6 = \xi^2 - \xi^3, A_7 = 3\xi^2 - 2\xi^3, A_8 = 1 - 3\xi^2 + 2\xi^3, A_9 = \xi - 2\xi^2 + \xi^3$$

軸対称シェルの中央面の歪-変位関係式は、次式を採用する。

$$\begin{aligned} \varepsilon_s &= \frac{\partial u}{\partial s} - w \frac{d\phi}{ds} \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \sin \phi + w \cos \phi \right) \\ \varepsilon_{s\theta} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} - v \sin \phi + r \frac{\partial v}{\partial s} \right) \\ \kappa_s &= - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} + u \frac{d^2 \phi}{ds^2} + \frac{\partial u}{\partial s} \frac{d\phi}{ds} \right) \\ \kappa_\theta &= - \frac{1}{r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial w}{\partial s} + u \frac{d\phi}{ds} \right) \sin \phi \right] \\ \kappa_{s\theta} &= - \frac{2}{r} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial s \partial \theta} - \frac{\sin \phi}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - v \cos \phi \right) - \frac{\partial v}{\partial s} \cos \phi + \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{d\phi}{ds} \right] \end{aligned} \quad (2-4)$$

ここに、 ϕ はシェル中央面における経線方向の接線と z 軸とのなす角を表す。

(2-3)式で定義された変位を上式に代入すると、シェル中央面の歪は要素両端の節点変位の線形関数として表現される。すなわち、Fourier級数の展開項 n に対して、次の関係式が成り立つ。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{B}_n \mathbf{d}_n \quad (2-5)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = [\varepsilon_{sn} \quad \varepsilon_{\theta n} \quad \varepsilon_{s\theta n} \quad \kappa_{sn} \quad \kappa_{\theta n} \quad \kappa_{s\theta n}]^T, \mathbf{d}_n = [u_n \quad v_n \quad w_n \quad \beta_n \quad u_n \quad v_n \quad w_n \quad \beta_n]^T$$

$$[\mathbf{B}_n] = [\mathbf{B}_{in} \quad \mathbf{B}_{jn}]$$

$$[\mathbf{B}_{in}] = \begin{bmatrix} -1/l & 0 & 0 & 0 \\ A_1 \sin \phi / r & nA_1 / r & A_8 \cos \phi / r & lA_9 \cos \phi / r \\ -nA_1 / r & -1/l - A_1 \sin \phi / r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6A_2 / l^2 & (4 - 6\xi) / l \\ 0 & nA_1 \cos \phi / r^2 & n^2 A_8 / r^2 + 6A_3 / lr & n^2 lA_9 / r^2 - A_5 \sin \phi / r \\ 0 & -2 \cos \phi / lr - 2A_1 \sin \phi \cos \phi / r^2 & -12nA_3 / lr - 2nA_8 \sin \phi / r^2 & 2nA_5 / r - 2nlA_9 \sin \phi / r^2 \end{bmatrix}$$

$$[\mathbf{B}_{jn}] = \begin{bmatrix} 1/l & 0 & 0 & 0 \\ \xi \sin \phi / r & n\xi / r & A_7 \cos \phi / r & -lA_6 \cos \phi / r \\ -n\xi / r & 1/l - \xi \sin \phi / r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6A_2 / l^2 & (2 - 6\xi) / l \\ 0 & n\xi \cos \phi / r^2 & n^2 A_7 / r^2 - 6A_3 / lr & -n^2 lA_6 / r^2 + A_4 \sin \phi / r \\ 0 & 2 \cos \phi / lr - 2\xi \sin \phi \cos \phi / r^2 & 12nA_3 / lr - 2nA_7 \sin \phi / r^2 & -2nA_4 / r + 2nlA_6 \sin \phi / r^2 \end{bmatrix}$$

経線方向、周方向の直応力、及びせん断力を $N_s, N_\theta, N_{s\theta}$ 、経線方向、周方向の曲げモーメント、及びねじりモーメントを $M_s, M_\theta, M_{s\theta}$ とする。これらの合応力は θ 方向に変数分離され、次のように表すことができる。

$$N_s = \sum_{n=0}^{N_w} N_{sn} \cos n\theta, N_\theta = \sum_{n=0}^{N_w} N_{\theta n} \cos n\theta, N_{s\theta} = \sum_{n=1}^{N_w} N_{s\theta n} \sin n\theta$$

$$M_s = \sum_{n=0}^{N_w} M_{sn} \cos n\theta, M_\theta = \sum_{n=0}^{N_w} M_{\theta n} \cos n\theta, M_{s\theta} = \sum_{n=1}^{N_w} M_{s\theta n} \sin n\theta$$

Fourier 級数の展開項 n に対して、次の関係式が成り立つ。

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon}_n \quad (2-6)$$

ここに、材料は均質等方弾性体を仮定すれば、

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \begin{bmatrix} N_{sn} & N_{s\theta n} & N_{\theta n} & M_{sn} & M_{\theta n} & M_{s\theta n} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{D} = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 & & & \\ \nu & 1 & 0 & & & \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 & & & \\ & & & h^2/12 & \nu h^2/12 & 0 \\ & & & \nu h^2/12 & h^2/12 & 0 \\ & & & 0 & 0 & (1-\nu)h^2/24 \end{bmatrix}$$

であり、 E はヤング率、 h はシェル厚、 ν はポアソン比を表す。

仮想仕事の原理により、次式が成立する。

$$l \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sum_m \sum_n \delta \boldsymbol{\epsilon}_m^T \boldsymbol{\sigma}_n \begin{pmatrix} \cos m\theta \cos n\theta \\ \sin m\theta \sin n\theta \end{pmatrix} r d\xi d\theta - \int_0^{2\pi} \sum_m \sum_n \delta \mathbf{d}_m^T \mathbf{f}_{rn} \begin{pmatrix} \cos m\theta \cos n\theta \\ \sin m\theta \sin n\theta \end{pmatrix} d\theta = 0 \quad (2-7)$$

ここに、 \mathbf{f}_{r_n} は(2-2)式の節点外力のFourier係数に回転半径を乗じたベクトルであり、次式で表される。

$$\mathbf{f}_{r_n} = \left[V_{in}r_i \quad T_{in}r_i \quad H_{in}r_i \quad M_{in}r_i \quad V_{jn}r_j \quad T_{jn}r_j \quad H_{jn}r_j \quad M_{jn}r_j \right]^T$$

(2-7)式に(2-5),(2-6)式を代入し、Fourier級数の直交性と $\delta \mathbf{d}_n$ が任意であることを考慮すると、Fourier級数の展開項毎に、次の釣合方程式が得られる。

$$\mathbf{k}_n \mathbf{d}_n - \pi \mathbf{f}_{r_n} = \mathbf{0} \quad (2-8)$$

ここに、

$$\mathbf{k}_n = \pi l \int_0^1 \mathbf{B}_n^T \mathbf{D} \mathbf{B}_n r d\xi$$

2.2.2 最適化問題

(2-5),(2-6)式の行列うち、曲げモーメント及びねじりモーメントに対応する部分行列を用いて、次式のように表現する。

$$\mathbf{M}_n = \mathbf{D}^* \mathbf{B}_n^* \mathbf{d}_n \quad (2-9)$$

ここに、 $\mathbf{M}_n = \left[M_s \quad M_\theta \quad M_{s\theta} \right]^T$ である。

上式を用いると、目的関数 f は次式のように表される。

$$\begin{aligned} f(\mathbf{r}) &= \sum_e^M l \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sum_m^{N_w} \sum_n^{N_w} \mathbf{M}_m^T \mathbf{M}_n \begin{pmatrix} \cos m\theta \cos n\theta \\ \sin m\theta \sin n\theta \end{pmatrix} r d\xi d\theta \\ &= \sum_e^M \sum_n^{N_w} \mathbf{d}_n^T \left(\pi l \int_0^1 \mathbf{B}_n^{*T} \mathbf{D}^{*T} \mathbf{D}^* \mathbf{B}_n^* r d\xi \right) \mathbf{d}_n \end{aligned} \quad (2-10)$$

従って、最適化問題は次式のように表現することができる。

$$\begin{aligned} \text{Objective Function} \quad f(\mathbf{r}) &= \sum_e^M \sum_n^{N_w} \mathbf{d}_n^T \mathbf{G}_n \mathbf{d}_n \quad \rightarrow \text{Minimize} \\ \text{Subject to} \quad \mathbf{c}(\mathbf{r}) &= \sum_e^M S_e - S_0 = 0 \end{aligned} \quad (2-11)$$

ここに、 $\mathbf{G}_n = \pi l \int_0^1 \mathbf{B}_n^{*T} \mathbf{D}^{*T} \mathbf{D}^* \mathbf{B}_n^* r d\xi$ である。

問題(2-11)式に対するLagrange関数を次式のように定義する。

$$L(\mathbf{r}, \mu) = f(\mathbf{r}) + \mu \mathbf{c}(\mathbf{r}) = \sum_e^M \sum_n^{N_w} \mathbf{d}_n^T \mathbf{G}_n \mathbf{d}_n + \mu \left(\sum_e^M S_e - S_0 \right) \quad (2-12)$$

ここに μ は、Lagrange乗数を表す。上式をパラメータ \mathbf{r} 及び μ で偏微分することで、問題(2-11)式の最適性必要条件は次式で表すことができる。

$$\frac{\partial L(\mathbf{r}, \mu)}{\partial r_{\alpha i}} = \sum_e^M \sum_n^{N_w} \left(\frac{\partial \mathbf{d}_n^T}{\partial r_{\alpha i}} \mathbf{G}_n \mathbf{d}_n + \mathbf{d}_n^T \frac{\partial \mathbf{G}_n}{\partial r_{\alpha i}} \mathbf{d}_n + \mathbf{d}_n^T \mathbf{G}_n \frac{\partial \mathbf{d}_n}{\partial r_{\alpha i}} \right) + \mu \sum_e^M \frac{\partial S_e}{\partial r_{\alpha i}} = 0$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{r}, \mu)}{\partial \mu} = \sum_e^M S_e - S_0 = 0 \quad (2-13)$$

本問題は、上式を満たす節点位置ベクトル \mathbf{r} と μ を求める問題として扱われる。問題は制約つき非線形最適化問題であり、1.5 節に示した逐次二次計画法が適用される。最適化時には1.6 節に示したように各種マトリクスによる微分マトリクスが必要となるが、これらマトリクスの詳細については付録 A にまとめて示す。また、分布外力は等価節点力として与えるものとし、自重などの曲面形状に依存する外力については、 \mathbf{r} による微分を行い感度を評価する。これらの詳細についても付録 A に示す。

2.3 自重の作用する軸対称シェルの数値解析

自重の作用する軸対称シェルの数値解析例を示す。初期形状はスパン30m、表面積800m²の球形シェルとする。シェル厚を0.1m、ヤング率を21GPa、ポアソン比を0.17、単位体積重量を24kN/m³とする。要素分割は、経線方向に沿って40分割とし、曲げ応力が集中する境界付近の要素分割を細かくしている。設計変数は境界部の節点を除く各節点のz座標とする。制約条件として、初期形状である球形シェルと同じ800m²の表面積を指定する。境界条件を曲面の法線方向にローラー支持した場合（斜行ローラー支持）、ピン支持、固定支持とした場合の3種類について、それぞれ最適化を行う。

境界条件を斜行ローラー支持とした場合の最適化によって得られた最終形状を、Fig.2-3-aに示す。図は軸対称であるシェルの経線に沿った形状を表しており、記号■, □はそれぞれ、最終形状および初期形状の節点座標を表している。これらの初期形状、最終形状の自重作用下における膜応力（合応力）の分布をFig.2-3-bに示す。記号■, ▲はそれぞれ最終形状の経線方向及び周方向の膜応力を、記号□, △は同様に初期形状の経線方向及び周方向の膜応力を表している。最終形状の自重作用下における曲げモーメントの分布をFig.2-3-cに示す。記号と、各形状及び合応力との対応は膜応力の場合と同様である。また、初期形状、最終形状の境界部付近における変形の様子を拡大し

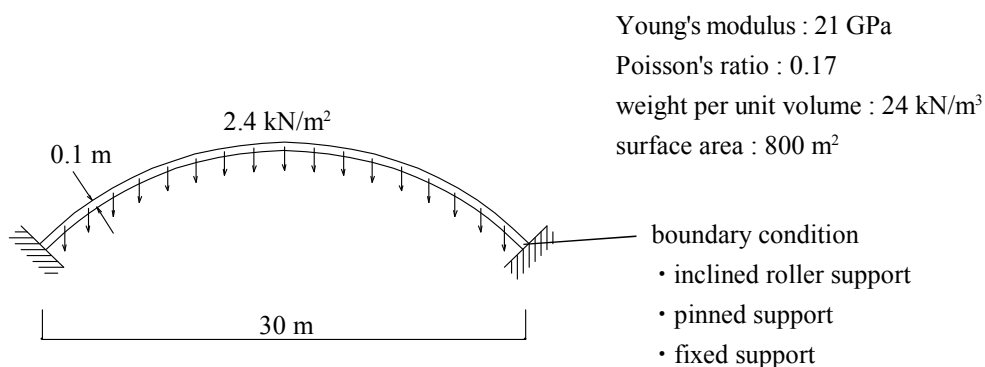
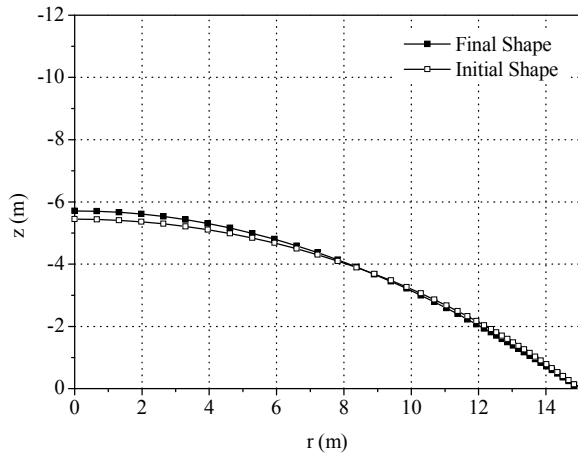
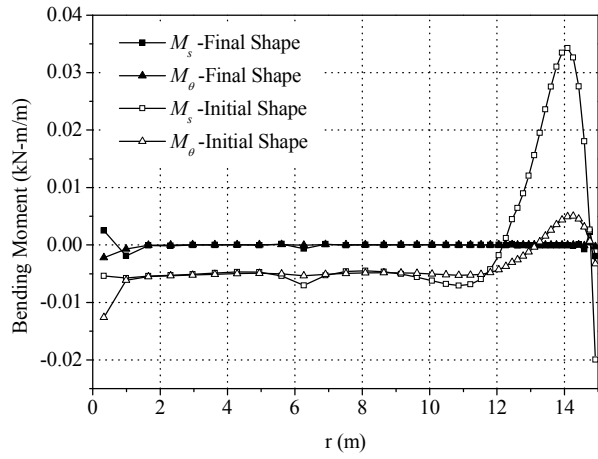


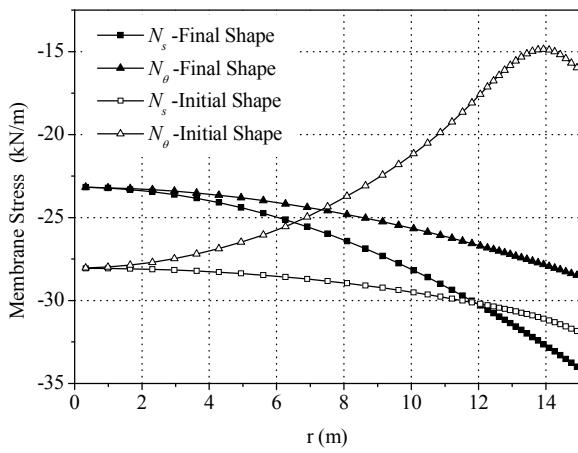
Fig.2-2 解析モデル



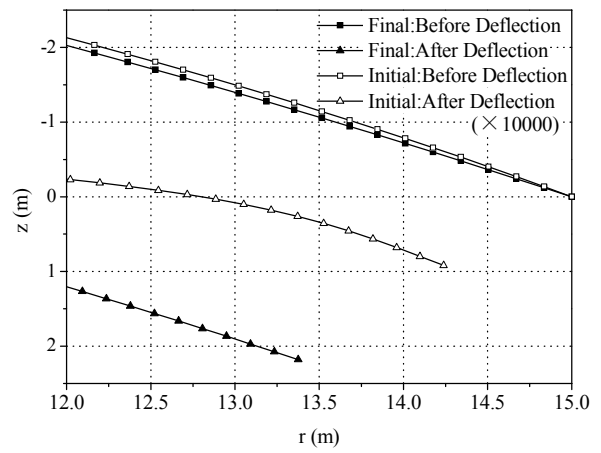
a: シェル形状



c: 曲げモーメント

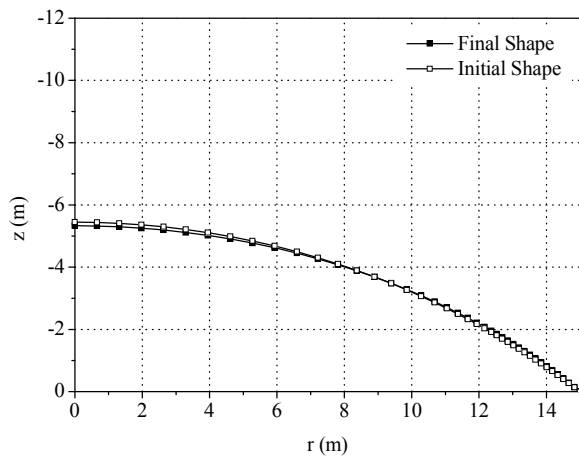


b: 膜応力

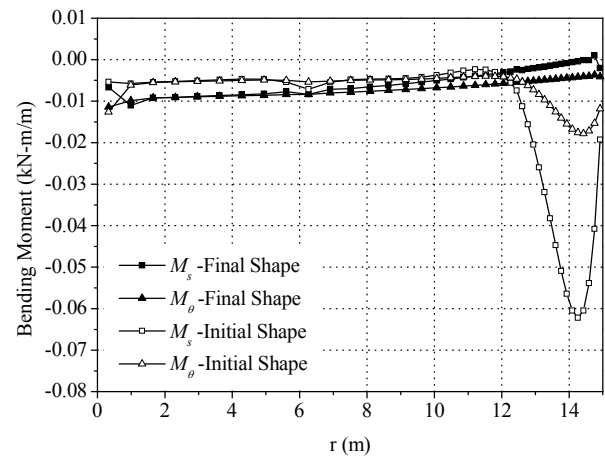


d: 変位性状

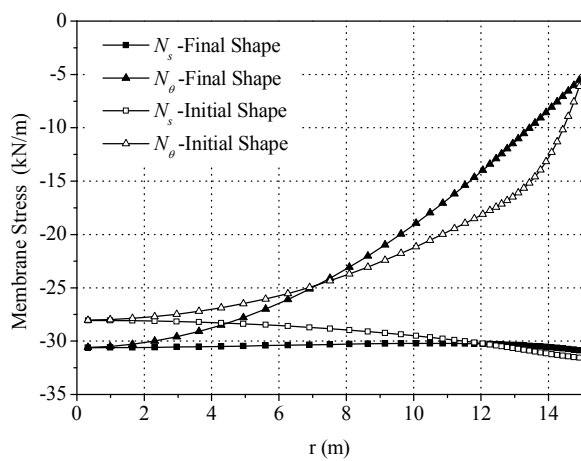
Fig.2-3 解析結果 (自重, 表面積800m², 斜行ローラー支持)



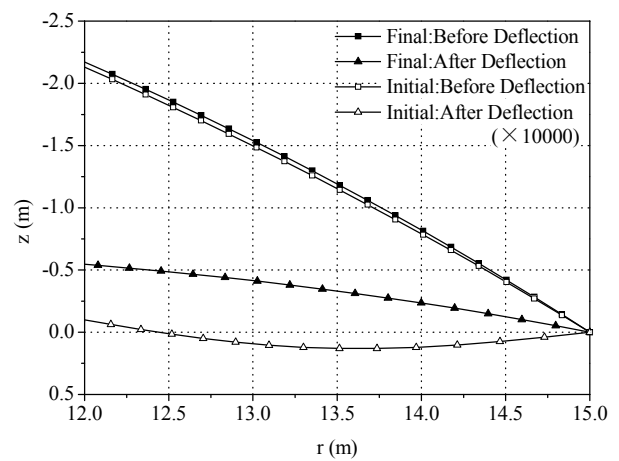
a: シェル形状



c: 曲げモーメント

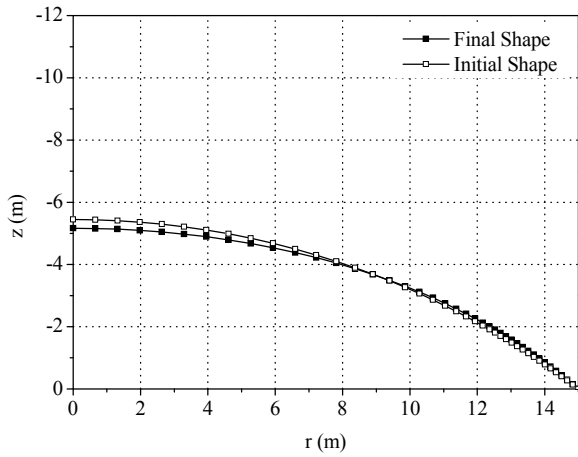


b: 膜応力

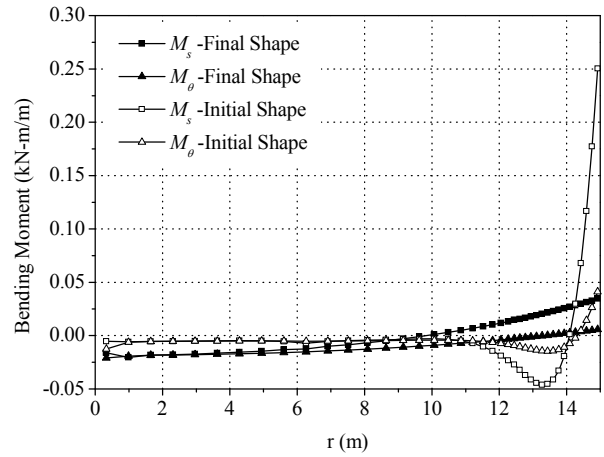


d: 変位性状

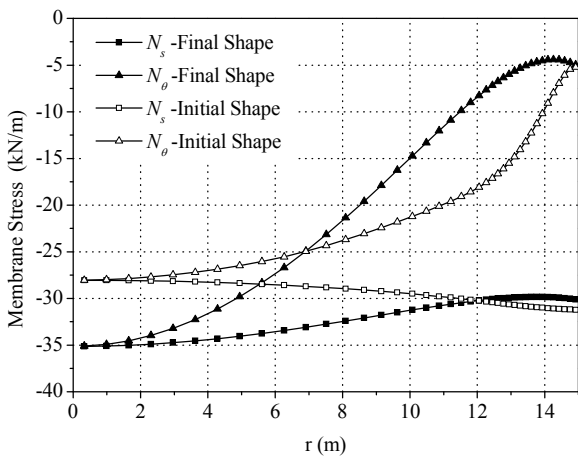
Fig.2-4 解析結果 (自重, 表面積800m², ピン支持)



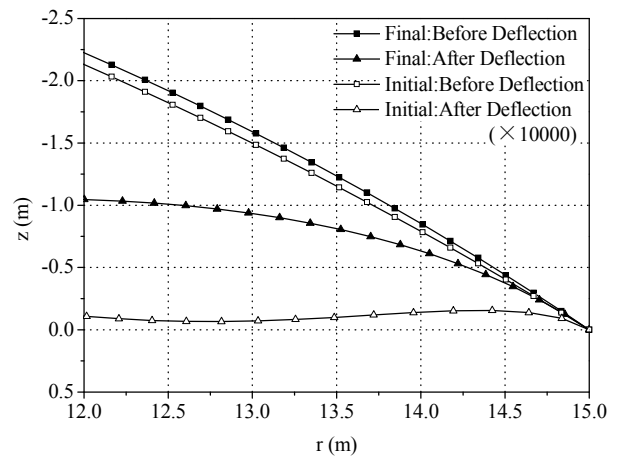
a: シェル形状



c: 曲げモーメント



b: 膜応力



d: 変位性状

Fig.2-5 解析結果 (自重, 表面積800m², 固定支持)

て、Fig.2-3-dに示す。図中の記号■, ▲はそれぞれ最終形状の荷重作用前の形状と荷重作用時の変位を10000倍にして表した形状を示している。記号□, △は同様に初期形状における荷重作用前後の形状を示している。

境界条件をピン支持とした場合の結果を、Fig. 2-4-a～dに、境界条件を固定支持とした場合の結果をFig. 2-5-a～dに示す。各図の記号は斜行ローラー支持の場合と同様である。

最終形状は、いずれの境界条件においても初期形状（球形シェル）に比較的良く似た形状が得られており、最適化による形状変化は小さい（Fig.2-3-a, 2-4-a, 2-5-a）。初期形状のライズは5.446mであり、最終形状のライズはそれぞれ斜行ローラー支持5.714m、ピン支持5.330m、固定支持5.164mである。最終形状は初期形状に比べて、斜行ローラー支持の場合には支持部付近の曲率が小さく、逆にピン支持、固定支持では大きくなっている。

境界を斜行ローラー支持とした場合、最終形状は曲面全体にわたり曲げモーメントを殆ど生じていない（Fig.2-3-c）。一方、境界を固定支持、ピン支持とした場合、境界付近に発生する曲げモーメントは大きく低減しているが、初期形状では曲げを発生していない境界から離れた場所に比較的小さな曲げモーメントを発生している（Fig.2-4-c, Fig.2-5-c）。これは、曲げモーメント分布を最小二乗法的に最小化したために、曲げモーメントを消失できない場合、曲面全体に均等に配分させる為と考える。また、各支持条件における変形性状を見ると、初期形状では境界付近で複曲率の変形を生じているのに対し、最終形状は曲率変化の比較的緩やかな変形性状を示しており、これが境界での曲げモーメントを抑える要因となっていることがわかる（Fig.2-3-d, 2-4-d, 2-5-d）。

以上の結果から、斜行ローラー支持とした場合、自重により初期応力として生じる曲げモーメントは、球形シェルからの比較的小さな形状修正によって完全に抑えることが可能であることがわかる。また、固定支持、ピン支持の結果においても、境界付近に発生する大きな曲げモーメントを小さく抑えることが可能であることを示している。この場合、曲げモーメントを曲面全体に小さなオーダーで分散させることで、応力の集中を抑えている。

2.4 積雪荷重の作用する軸対称シェルの数値解析

降雪の多い地域を想定して、自重と同時に積雪荷重の作用する場合について解析を行う。積雪状況は、風の影響や屋根の傾斜角などによって様々な分布状態が想定されるが、ここでは単純に等分布荷重としてモデル化し、Fig. 2-6に示す全面載荷（荷重ケース A）と中央部分載荷（荷重ケース B）の2種類の荷重分布に対して解析を行う。

初期形状は前節と同様、スパン30m、表面積800m²の球形シェルとする。シェル厚を0.1m、ヤング率を21GPa、ポアソン比を0.17、単位体積重量を24kN/m³とする。積雪荷重は400N/m²の等分布荷重とする。設計変数は境界部の節点を除く各節点のz座標とする。制約条件として、初期形状と同じ800m²の表面積を指定する。境界条件は固定支持とする。

2種類の荷重に対して得られた最終形状を同時にFig.2-7に示す。荷重ケース Aにより得られた最終形状を記号◇で、荷重ケース Bにより得られた最終形状を記号+で表している。初期形状のライズ5.446mに対し、最終形状のライズは、荷重ケース Aの場合5.177m、荷重ケース Bの場合5.270mである。

荷重ケース Aにおける初期形状および最終形状の応力分布をFig. 2-8に示す。同様に荷重ケース Bにおける初期形状および最終形状の応力分布をFig. 2-9に示す。

荷重ケース Aの場合、初期形状における応力の分布状態や、最適化による形状、応力分布の変化は、自重のみを与えた先の解析と良く似た傾向を示している (Fig.2-5, 2-7, 2-8)。これは等分布荷重の荷重モードが自重と類似しているためである。荷重ケース Bの場合、初期形状の曲げモーメント分布は、荷重の分布が不連続となる付近で応力が乱れ、比較的大きな曲げモーメントを発生している (Fig.2-9-b)。最終形状の曲げモーメントは、外力分布の不連続点で応力集中を生じていない。以上により、外力分布が不連続となる部分で発生する曲げモーメントに対しても、比較的小さな形状修正によってその発生を抑えることが可能であることがわかる。

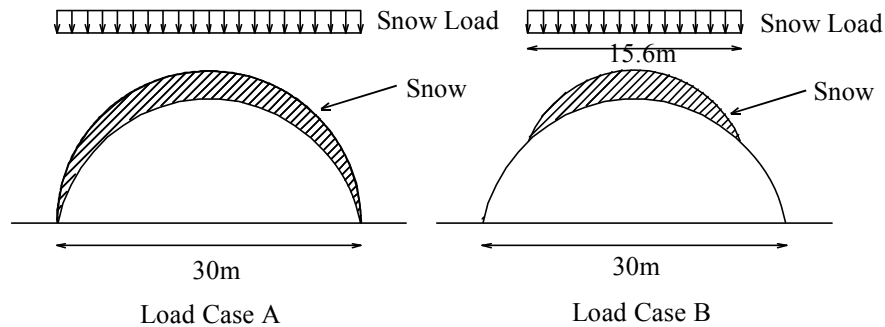


Fig.2-6 積雪荷重

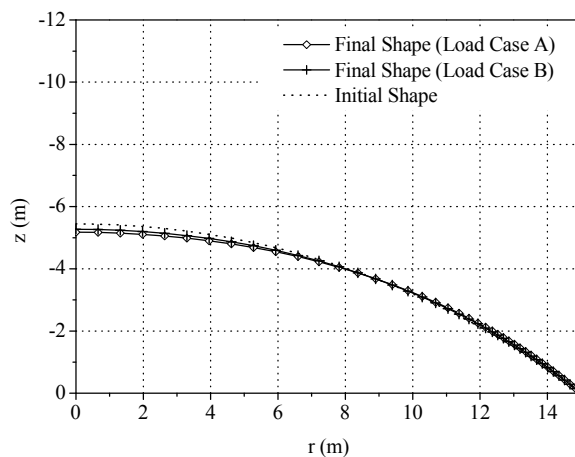
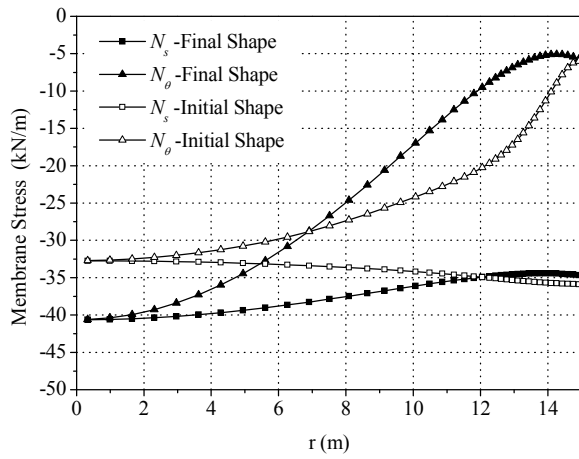
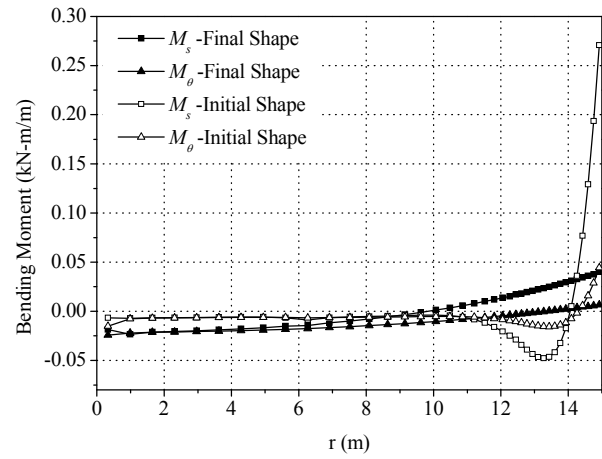


Fig.2-7 シェル形状 (自重+積雪, 表面積800m², 固定支持)

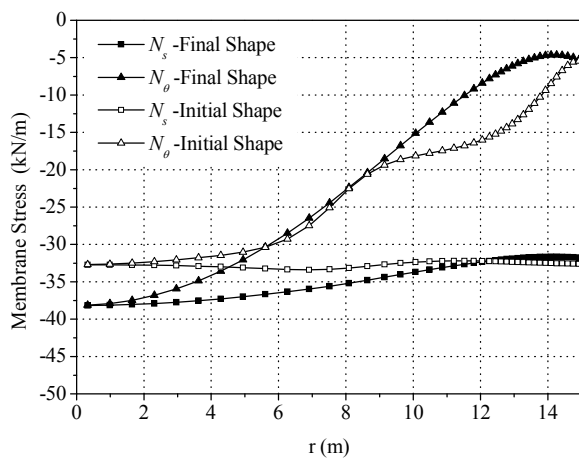


a: 膜応力

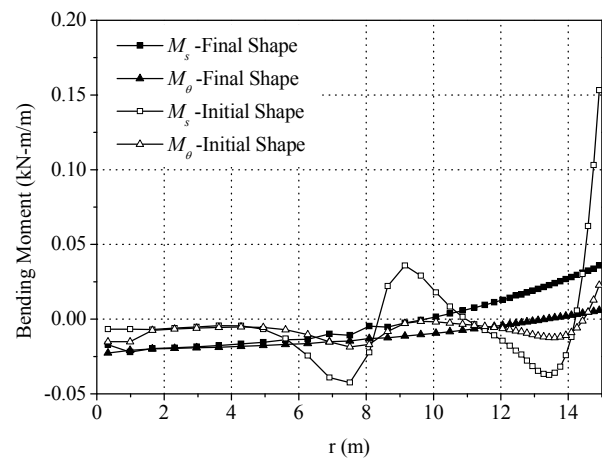


b: 曲げモーメント

Fig.2-8 応力分布 (Load Case A)



a: 膜応力



b: 曲げモーメント

Fig.2-9 応力分布 (Load Case B)

2.5 風荷重の作用する軸対称シェルの数値解析

自重に加えて、風荷重の作用する場合の形状最適化の例を示す。風荷重は、静的荷重として次式によりモデル化して与えるものとする (Fig. 2-10)。

$$w = cq \quad (2-14)$$

$$c = -1.4 + (0.9 + 0.6 \cos \theta + 0.9 \cos 2\theta) \cos \phi \quad (2-15)$$

ここに、 w は風圧力度、 q は速度圧、 c は風力係数を表す。

上記の荷重は非軸対称な荷重であるが、円錐台形要素を用いている為に、シェルの形状は常に軸対称のままである。ここでの問題は、形状修正を軸対称な修正に限定した幾何学的な拘束条件下での問題となる。

初期形状はこれまでと同様スパン30m、表面積800m²の球形シェルとし、要素分割は経線方向に40分割とする。シェル厚を0.1m、ヤング率を21GPa、ポアソン比を0.17、単位体積重量を24kN/m³とする。設計変数は境界部の節点を除く各節点のz座標とする。制約条件として、初期形状と同じ800m²の表面積を指定する。境界条件は固定支持とする。速度圧は563N/m²とする。

最終形状をFig.2-11に示す。また、初期形状及び最終形状の経線方向の曲げモーメント分布をFig. 2-12に、周方向の曲げモーメント分布をFig. 2-13に、振りモーメントをFig. 2-14に示す。

最適化による形状の変化は比較的小さい (Fig.2-11, 最終形状のライズ5.150m)。各モーメントの分布を見ると、最終形状は、初期形状に対して境界部の曲げモーメントの最大値が1/2程度に抑えられている (Fig.2-12~14)。軸対称な荷重を受ける場合に比べて効果は小さいが、非軸対称な荷重に対しても、曲げモーメントの発生を抑えることが可能であることがわかる。

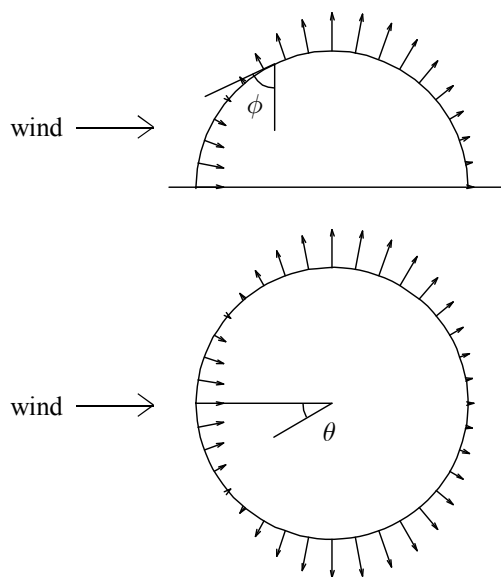


Fig.2-10 風荷重

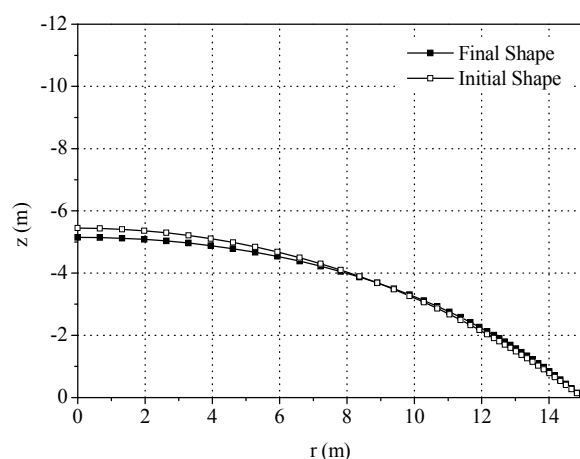


Fig.2-11 シェル形状

(自重+風荷重, 表面積800m², 固定支持)

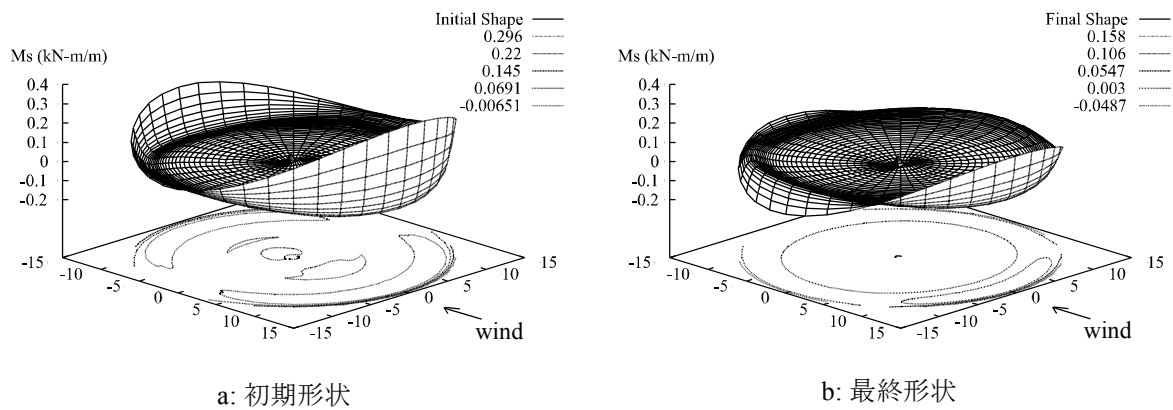


Fig.2-12 経線方向の曲げモーメント

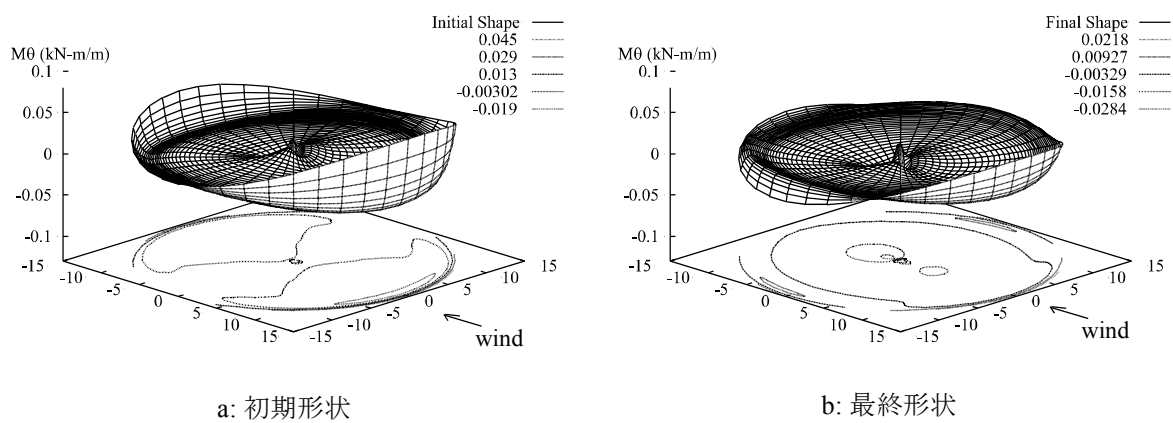


Fig.2-13 周方向の曲げモーメント

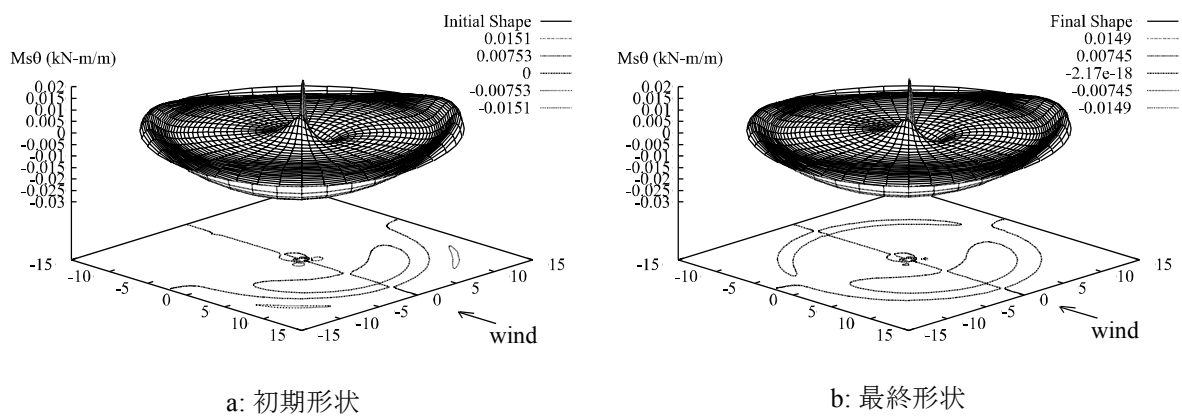


Fig.2-14 捩りモーメント

2.6 数値解析結果の考察

2.6.1 曲げモーメントの節点座標に対する感度

ここでは、曲面を構成している節点の移動が、曲げモーメントの分布にどのような影響を与えるかを理解するために、節点座標に対する曲げモーメントの感度の分布を調査する。

各要素の断面力の感度は次式によって表される。

$$\frac{\partial \sigma_n}{\partial r_{\alpha i}} = \begin{cases} \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{B}_n}{\partial r_{\alpha i}} \mathbf{d} + \mathbf{D} \mathbf{B}_n \frac{\partial \mathbf{d}_n}{\partial r_{\alpha i}} & (i \in E) \\ \mathbf{D} \mathbf{B}_n \frac{\partial \mathbf{d}_n}{\partial r_{\alpha i}} & (i \notin E) \end{cases} \quad (2-16)$$

ここに E は、1要素を構成する節点番号の集合を表す。

解析対象は、自重の作用する球形シェルとする (Fig.2-15)。各節点は r 座標に等間隔にとり、節点番号は回転軸から順に1,2,...,41とつける。このシェルにおける経線方向の曲げモーメント M_s の各節点の z 座標に対する感度の分布をFig. 2-16に示す。感度の分布は、特に節点1,10,20,30,40について示している。感度は節点に接続する2要素で大きな値を示し、その先の要素では逆符号の感度を生じている。さらに節点から2m程離れた要素では感度は殆ど生じていない。感度の値は、いずれの節点においても、節点部分でおよそ10kN-m/m²であり、即ち、節点が1mmずれることによって、その付近に約0.01kN-m/mの曲げモーメントを生じることになる。実際に、Fig.2-15のモデルに対し、節点10を1mmずらした時の曲げモーメント分布をFig.2-17に示す。

上述の感度は、先の最適化において初期形状とした球形シェルによるものである。次に最適化により得られた最終形状の感度の分布を調査する。2.3節で得られた3つの最終形状 (境界条件をそれぞれ斜行ローラー、ピン、固定とした場合の結果) について、それぞれ先と同様に、各節点 z 座標に対する曲げモーメントの感度の分布をFig.2-18-a,b,cに示す。最終形状においても、球形シェルの場合と同程度の大きさの感度を有することがわかる。斜行ローラー支持に関して言えば、節点40の感度の値が特に大きく、敏感であることがわかる (Fig.2-18-c)。これは節点40の座標がローラーの方向に影響を与えるためである。

初期形状、最終形状に関わらず各節点の感度の値は比較的大きく、局所的な不整は、その付近に大きな曲げモーメントを発生させることが確認できる。1節点の感度の分布は、節点から離れると節点位置とは逆符号の感度を有するため、隣り合う節点が同じ方向に不整をもつ場合、感度は打ち消しあう傾向にある。最終形状は、比較的敏感な感度を有する各節点が、曲げモーメントが消失するような分布に滑らかに配置されることによって得られていることが理解できる。

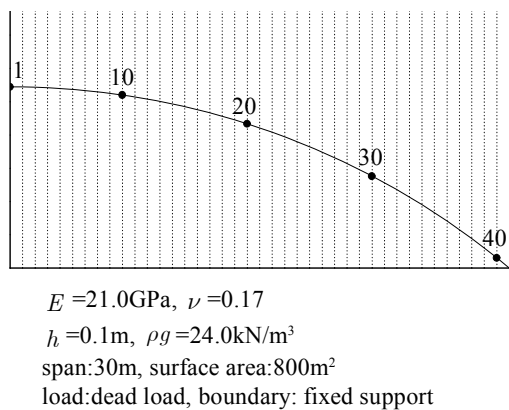
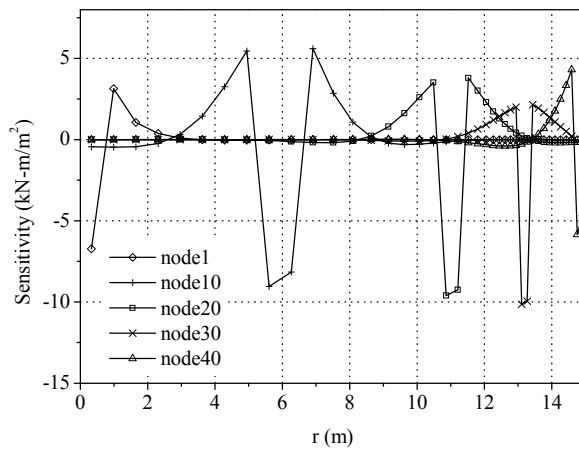


Fig. 2-15 解析モデル (球形シェル)



a: 固定支持

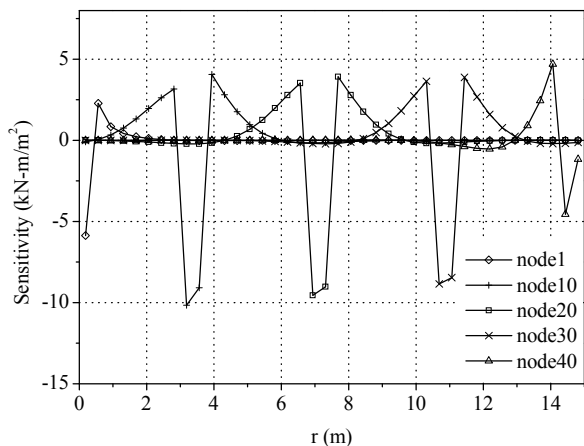
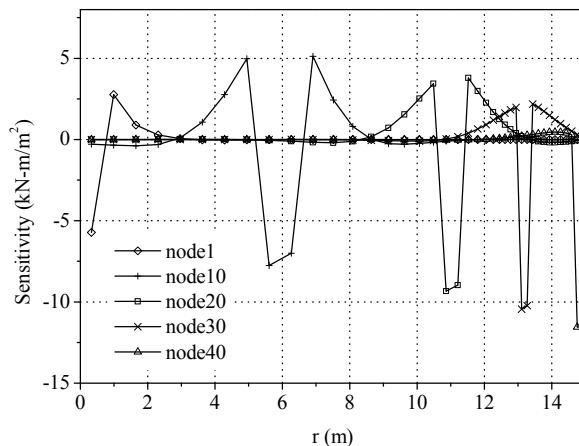


Fig. 2-16 M_s の節点1,10,20,30,40による感度



b: ピン支持

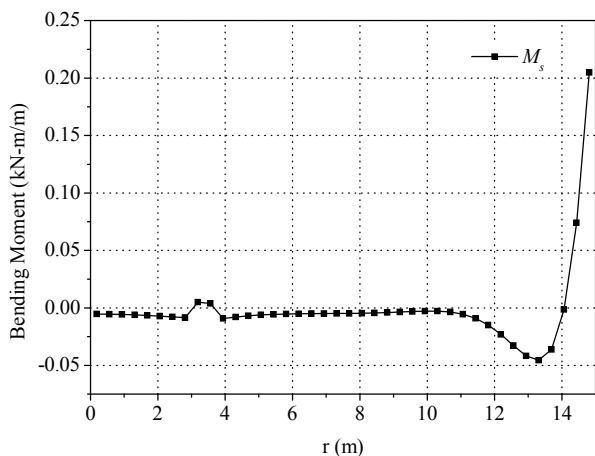
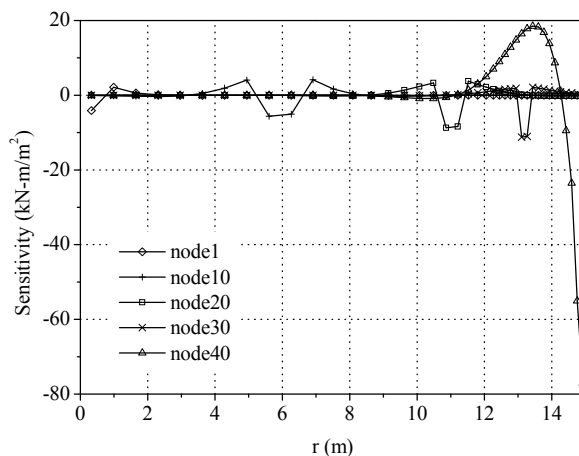


Fig. 2-17 節点10に1mmの不整を与えた場合の M_s の分布



c: 斜行ローラー支持

Fig. 2-18 最終形状における M_s の節点に対する感度

2.6.2 縁応力

2.3節で得られた最終形状を、最適化時とは異なる様々なシェル厚、スパンのシェルに置き換え、これらのシェルの断面に発生する応力の値を調査する。シェル厚を単層配筋で5cm、複層配筋で12cmとし、スパン、ライズは一様にスケーリングしなおして断面に生じる応力を改めて算定する。解析モデルは不静定構造であるため、シェル厚によって最終形状に違いが生じると考えられるが、その差は極めて小さいことを確認している。

シェル形状は、2.3節の問題に対して境界を固定支持とし、指定表面積を750m²、800m²、850m²とした時の初期形状（球形シェル）及び最終形状とする。表面積750 m²の場合をModel-Aとし、同様に表面積800m²のものをModel-B、表面積850m²のものをModel-Cとする（Fig.2-19）。さらに、これらスパン30mの形状を r, z 方向に一様に拡大し、スパン30m, 60m, 90m, 120mとした形状について、それぞれシェル厚を5cm,12cmとして応力の算定を行う。即ち、ここで扱うモデルは形状3×2種類（Model-

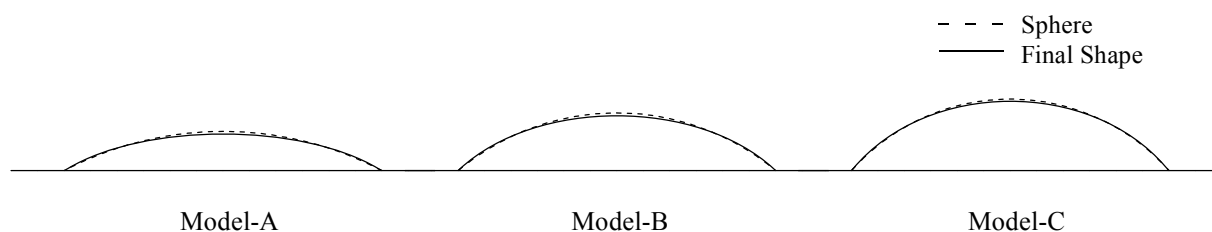


Fig. 2-19 解析形状

A,B,Cの初期形状、最終形状）×スパン4種類（30m,60m,80m,120m）×シェル厚2種類（5cm,12cm）の合計48個である。これらは全て、ヤング率21GPa、ポアソン比0.17、単位体積重量24kN/m³とする。

Model-Aの初期形状、最終形状に対しシェル厚5cm,スパン30m,60m,80m,120mとした時の、自重によって生ずるシェルの中央面における膜応力、及び曲げによる縁応力の値をTable-2-1-1に示す。応力は、シェル頂部付近と境界付近での値についてそれぞれ示している。頂部付近の応力は、回転軸から2要素目の要素中点における応力とし、境界部の応力は境界に接する要素中点の値を示している。同様に、Model-B, シェル厚5cmの結果をTable 2-1-2に、Model-C, シェル厚5cmの結果をTable 2-1-3に示す。Model-A,B,Cに対しシェル厚を12cmとした場合の結果をTable 2-1-4～6に示す。

初期形状である球形シェルに注目すると、Model-A,B,Cの比較により、扁平であるほど境界付近の曲げ応力が大きくなることが確認できる。また、シェル厚が大きいほど境界での曲げが大きくなり、スパンが小さいほど境界付近の曲げ応力の大きさは、膜応力に近づく傾向があることが確認できる。特にライズ・スパン比が境界の曲げ応力の大きさに与える影響が大きく、Model-Aの球形シェルでは、いずれのシェル厚、スパンにおいても、境界付近の曲げ応力は、膜応力と同程度の値を生じていることがわかる。

一方、最終形状に対してもライズ・スパン比、シェル厚、スパンに対する曲げ応力の変化には同じ傾向が見られるが、いずれの場合においても、膜応力に比べ曲げ応力は極端に小さい。

以上の結果から、球形シェルでは、扁平になるほど境界付近に引張応力を生じやすく、小さな外部荷重によってひび割れを発生する。最終形状では、断面内にはほぼ様な圧縮応力を生じており、球形シェルに比べて引張応力を生じにくいと言える。引張応力を受ける部分にはその応力を負担するだけの鉄筋を配す必要があることから、曲げモーメントの生じない形状を採用することは効果的であると言えるだろう。

他の設計外力を考慮する必要がある。また、球形シェルと最終形状の形状の差は比較的小さい

Table 2-1-1 縁応力 : Model-A : シェル厚5cm

Model-A (h=5cm)		Vicinity of Apex		Boundary	
span(m)		Membrane stress	Bending stress	Membrane stress	Bending stress
		N/mm ²	N/mm ²	N/mm ²	N/mm ²
Sphere	30	-0.387	-0.002	-0.398	0.344
	60	-0.774	-0.004	-0.804	0.608
	90	-1.161	-0.008	-1.210	0.838
	120	-1.548	-0.016	-1.618	1.044
Final Shape	30	-0.521	-0.015	-0.372	0.027
	60	-1.042	-0.022	-0.745	0.034
	90	-1.563	-0.033	-1.117	0.043
	120	-2.084	-0.049	-1.490	0.054

Table 2-1-4 縁応力 : Model-A : シェル厚12cm

Model-A (h=12cm)		Vicinity of Apex		Boundary	
span(m)		Membrane stress	Bending stress	Membrane stress	Bending stress
		N/mm ²	N/mm ²	N/mm ²	N/mm ²
Sphere	30	-0.387	-0.004	-0.390	0.394
	60	-0.773	-0.005	-0.793	0.708
	90	-1.160	-0.006	-1.198	0.994
	120	-1.547	-0.008	-1.604	1.259
Final Shape	30	-0.521	-0.030	-0.372	0.058
	60	-1.042	-0.033	-0.745	0.062
	90	-1.563	-0.038	-1.117	0.068
	120	-2.084	-0.050	-1.490	0.075

Table 2-1-2 縁応力 : Model-B : シェル厚5cm

Model-B (h=5cm)		Vicinity of Apex		Boundary	
span(m)		Membrane stress	Bending stress	Membrane stress	Bending stress
		N/mm ²	N/mm ²	N/mm ²	N/mm ²
Sphere	30	-0.281	-0.002	-0.314	0.123
	60	-0.562	-0.004	-0.630	0.200
	90	-0.843	-0.010	-0.947	0.261
	120	-1.124	-0.018	-1.263	0.312
Final Shape	30	-0.351	-0.008	-0.301	0.011
	60	-0.702	-0.015	-0.602	0.012
	90	-1.054	-0.026	-0.904	0.013
	120	-1.405	-0.041	-1.205	0.014

Table 2-1-5 縁応力 : Model-B : シェル厚12cm

Model-B (h=12cm)		Vicinity of Apex		Boundary	
span(m)		Membrane stress	Bending stress	Membrane stress	Bending stress
		N/mm ²	N/mm ²	N/mm ²	N/mm ²
Sphere	30	-0.281	-0.004	-0.312	0.158
	60	-0.562	-0.005	-0.627	0.260
	90	-0.843	-0.006	-0.943	0.346
	120	-1.124	-0.008	-1.260	0.423
Final Shape	30	-0.351	-0.014	-0.301	0.025
	60	-0.702	-0.017	-0.602	0.025
	90	-1.053	-0.022	-0.904	0.026
	120	-1.405	-0.029	-1.205	0.027

Table 2-1-3 縁応力 : Model-C : シェル厚5cm

Model-C (h=5cm)		Vicinity of Apex		Boundary	
span(m)		Membrane stress	Bending stress	Membrane stress	Bending stress
		N/mm ²	N/mm ²	N/mm ²	N/mm ²
Sphere	30	-0.241	-0.002	-0.288	0.019
	60	-0.482	-0.005	-0.577	0.014
	90	-0.723	-0.010	-0.865	0.009
	120	-0.963	-0.019	-1.154	0.004
Final Shape	30	-0.280	-0.006	-0.283	0.006
	60	-0.561	-0.013	-0.566	0.007
	90	-0.841	-0.024	-0.849	0.007
	120	-1.122	-0.038	-1.132	0.007

Table 2-1-6 縁応力 : Model-C : シェル厚12cm

Model-C (h=12cm)		Vicinity of Apex		Boundary	
span(m)		Membrane stress	Bending stress	Membrane stress	Bending stress
		N/mm ²	N/mm ²	N/mm ²	N/mm ²
Sphere	30	-0.241	-0.004	-0.288	0.043
	60	-0.481	-0.005	-0.577	0.045
	90	-0.722	-0.006	-0.865	0.043
	120	-0.963	-0.009	-1.154	0.038
Final Shape	30	-0.280	-0.010	-0.283	0.015
	60	-0.561	-0.013	-0.566	0.015
	90	-0.841	-0.017	-0.849	0.016
	120	-1.122	-0.024	-1.132	0.015

ことから、施工により生ずる形状不整などによっても応力状態は変化すると考えられる。従って、実際のシェル構造へ適用する場合の方法や効果については、より詳細な検討を必要とする。

2.7 2章のまとめ

軸対称シェル要素による定式化を示し、ドーム状のシェル構造物に対し、曲げモーメント分布を最小とする形状を数値解析的に求めた。得られた主要な結果は以下のようにまとめられる。

- 1) 曲げモーメントの発生の小さいシェルの曲面形状を求める手法として、感度解析手法に基づく最適化手法を適用できる。
- 2) 自重や載荷荷重のような確定静的荷重下において、ドームに生ずる境界付近に集中的に発生する曲げモーメントは、一般的な球形シェルに対して形状の比較的小さな変化によって大きく低減することができる。
- 3) 部分載荷のような不連続な外力に対しても、形状の修正によってその付近に生ずる曲げモーメントの発生を抑えることができる。
- 4) ここで示した方法は、風荷重などの非軸対称な外力に対しても有効である。

2)で述べられている事実を言い換えると、シェル構造において生ずる境界付近の曲げモーメントは、シェルの形状に敏感に反応して変化するものであることを意味している。設計時に算定された応力分布が、施工誤差などによって大きく異なった応力を示す可能性を意味しており、この点に関しては実際の設計において十分な注意が必要である。

3. 自由曲面シェルの形状最適化

3.1 はじめに

前章で扱ったドームのように、境界に沿って曲面が支持されたシェルが分布外力を受ける場合、曲げモーメントは境界付近に局所的に発生する。この局所的な曲げモーメントの分布はシェル形状に極めて敏感であり、比較的小さな形状の差異によって大きく異なることを前章で示した。

境界がすべて支持されたシェルでは二次元的なアーチ効果によって曲面の広い範囲で膜応力状態を実現し、曲げモーメントは限られた範囲でしか発生しない。別の考え方をすれば、広い意味でその構造形態は既に最適化されているものとも考えることもできる。一方で、Fig3-1 に示す曲面の数箇所を点で支持するような形式のシェルでは、前述のシェルに比べると力学性状は一次元のアーチに近く、曲面の広い範囲に比較的大きな曲げモーメントを発生する。その為、この形式の既存のシェルの設計では、境界に沿って縁梁を配置する計画が多く用いられる。一方で、H. Isler は懸垂模型によりシェル形状を決定することによって、境界に縁梁を持たないシェルを数多く建設している。

本章では、前章までの方法を自由端部を持つより自由な曲面の形状決定問題に適用する。多様な曲面形状を扱うために、三角形平面要素により曲面の離散化を行う。応力の評価にある程度の解析精度を持たせるためには十分な要素分割を施す必要があるが、要素分割を細かくした場合、設計変数である節点座標を増やすことになり、収束性の低下を招く恐れがある。このため、曲面関数を利用することで未知変数の低減を図っている。

3.2 テンソル積ベジエ曲面による曲面の表現

曲面を離散化して節点座標をすべて未知量とするには自由度が大きく、収束解を得るのが困難となる場合も考えられる。未知量を減らすため、少数のデータで様々な曲面を表現することのできるテンソル積ベジエ曲面⁹⁾を利用する。設計変数は曲面を定義する制御点座標とし、応答計算に関してはこれまでと同様に、曲面を離散化して有限要素法による線形解析を行う。離散化された曲面の節点座標は制御点座標の関数として表現されるため、有限要素法により算定される曲面の応力は制御点座標の関数として扱うことができる。

曲面形状を定義する制御点を $(m+1) \times (n+1)$ の網状に配置し (Fig.3-1-a)、各制御点の位置ベクトルを $\mathbf{p}_{ij} = [p_{xij} \ p_{yij} \ p_{zij}]^T$ ($i = 0, \dots, m$) ($j = 0, \dots, n$) と表す。曲面上の位置を定める2つのパラメータを u, v ($0 \leq u, v \leq 1$) とすると、曲面の任意点における位置ベクトル $\mathbf{r}(u, v) = [r_x(u, v) \ r_y(u, v) \ r_z(u, v)]^T$ は、次式により表される。

$$\mathbf{r}(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u) B_j^n(v) \mathbf{p}_{ij} \tag{3-1}$$

ここに、 $B_i^m(u)$ は m 次の Bernstein 多項式を意味し、次式で表される。

$$B_i^m(u) = \frac{m!}{i!(m-i)!} u^i (1-u)^{m-i} \quad (i = 0, \dots, m) \tag{3-2}$$

有限要素法における要素分割は、(3-1)式の曲面を、 u, v 方向にそれぞれ m', n' 個に分割するものとする (Fig.3-1-b)。離散化された曲面における各節点の位置ベクトル $\mathbf{r}_{kl} = [r_{xkl}, r_{ykl}, r_{zkl}]^T$ ($k = 0, \dots, m'$) ($l = 0, \dots, n'$) は、パラメータ u, v の離散データ u_k ($k = 0, \dots, m'$) , v_l ($l = 0, \dots, n'$) を与えることにより、次式のように表現される。

$$\mathbf{r}_{kl} = \mathbf{r}(u_k, v_l) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n B_i^m(u_k) B_j^n(v_l) \mathbf{p}_{ij} \quad (k = 0, \dots, m')(l = 0, \dots, n') \tag{3-3}$$

節点座標は制御点座標により表されるが、三角形平面要素の各種マトリクスやベクトルは、制御点座標を用いて陽に表現することはせず、通常の節点座標を用いた定式化を行う。最適化時には、これらマトリクスやベクトルに対して制御点位置ベクトル $\mathbf{p} = [\mathbf{p}_{00}^T, \dots, \mathbf{p}_{m'0}^T, \mathbf{p}_{01}^T, \dots, \mathbf{p}_{m'1}^T, \dots, \mathbf{p}_{0n'}^T, \dots, \mathbf{p}_{m'n'}^T]^T$ に関する導関数が必要となるが、これは例えば、変数 X の感度係数を、節点位置ベクトル $\mathbf{r} = [\mathbf{r}_{00}^T, \dots, \mathbf{r}_{m'0}^T, \mathbf{r}_{01}^T, \dots, \mathbf{r}_{m'1}^T, \dots, \mathbf{r}_{0n'}^T, \dots, \mathbf{r}_{m'n'}^T]^T$ を介して次式のように表現する。

$$\frac{\partial X}{\partial p_{\alpha ij}} = \sum_{k=0}^{m'} \sum_{l=0}^{n'} \frac{\partial X}{\partial r_{\alpha kl}} \frac{\partial r_{\alpha kl}}{\partial p_{\alpha ij}} \quad (\alpha = x, y, z)(i = 1, \dots, m')(j = 1, \dots, n) \tag{3-4}$$

上式中の $\partial r_{\alpha kl} / \partial p_{\alpha ij}$ は、(3-3)式を偏微分することで次式のように表される。

$$\frac{\partial r_{\alpha kl}}{\partial p_{\alpha ij}} = B_i^m(u_k) B_j^n(v_l) \tag{3-5}$$

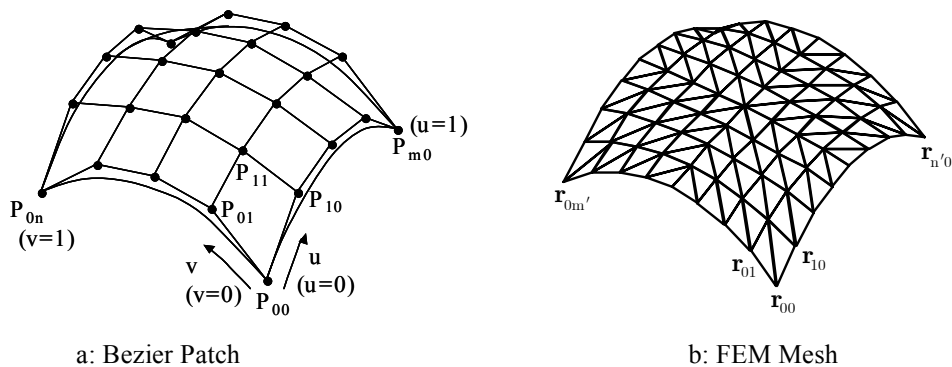


Fig.3-1 テンソル積ベジエ曲面と曲面の要素分割

3.3 三角形平面シェル要素

有限要素には三角形平面シェル要素を用いる (Fig. 3-2)。面内変形要素には定ひずみ三角形要素を、面外変形要素には Zienkiewicz らの非適合三角形要素を採用する。

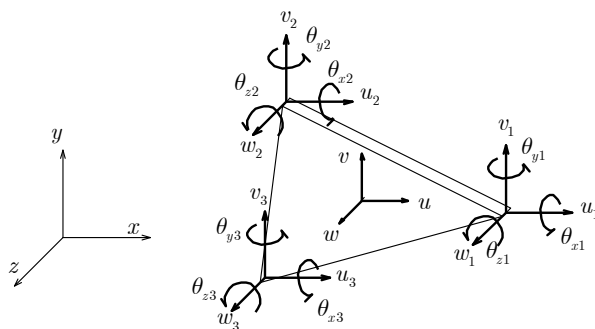


Fig.3-2 三角形平面シェル要素

3.3.1 面内変形要素

要素内任意点におけるシェル中央面の面内変位 u, v を、要素節点変位 $u_i, v_i (i = 1, 2, 3)$ を用いて次式により仮定する。

$$u = \sum_{i=1}^3 L_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^3 L_i v_i \quad (3-6)$$

ここに、 $L_i (i = 1, 2, 3)$ は三角形の面積座標に対応しており、次式で表される。

$$L_i = \frac{a_i + b_i x + c_i y}{2\Delta} \quad (3-7)$$

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j, \quad b_i = y_j - y_k, \quad c_i = x_k - x_j, \quad \Delta = \frac{1}{2} \det \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} \quad (3-8)$$

ただし、(3-8)式の (i, j, k) は $(1, 2, 3)$ の巡回置換を表す。

シェル中央面の面内歪 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$ は、次式で表される。

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3-9)$$

(3-6) 式で定義された変位を上式に代入すると、シェル中央面の歪は、節点変位の線形関数として次式のように表現される。

$$\epsilon_p = \mathbf{B}_p \mathbf{d}_p \quad (3-10)$$

ここに、 $\epsilon_p = [\epsilon_x \quad \epsilon_y \quad \epsilon_{xy}]^T$, $\mathbf{d}_p = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad u_3 \quad v_3]^T$

$$\mathbf{B}_p = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix}$$

である。

膜応力 (合応力) N_x, N_y, N_{xy} は、次式によって表される。

$$\sigma_p = \mathbf{D}_p \epsilon_p \quad (3-11)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_p = \begin{bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{D}_p = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

(3-10),(3-11)式を用いて仮想仕事の原理を適用すると、最終的に次の剛性マトリクスが得られる。

$$\mathbf{k}_p = \int \int \mathbf{B}_p^T \mathbf{D}_p \mathbf{B}_p h \, dx dy \quad (3-12)$$

3.3.2 面外変形要素

要素内任意点におけるシェル中央面のたわみ w を、次式により仮定する。

$$w = \sum_{i=1}^3 \left(N_i^{(0)} w_i + N_i^{(1)} \theta_{xi} + N_i^{(2)} \theta_{yi} \right) \quad (3-13)$$

ここに、

$$\begin{aligned} N_i^{(0)} &= L_i + L_i L_j (L_i - L_j) + L_i L_k (L_i - L_k) \\ N_i^{(1)} &= b_k \left(L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) - b_j \left(L_i^2 L_k + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \\ N_i^{(2)} &= c_k \left(L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) - c_j \left(L_i^2 L_k + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \end{aligned} \quad (3-14)$$

ただし、(3-14)式の (i, j, k) は $(1, 2, 3)$ の巡回置換を表す。

シェル中央面における曲率 κ_x, κ_y 及び捩率変化 κ_{xy} は次式により定義することができる。

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \kappa_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3-15)$$

(3-13)式で定義された変位を上式に代入すると、シェル中央面の曲率は、要素節点変位の線形関数として次式のように表現される。

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \mathbf{B}_b \mathbf{d}_b \quad (3-16)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\varepsilon}_b = \begin{bmatrix} \kappa_x & \kappa_y & \kappa_{xy} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{d}_b = \begin{bmatrix} w_1 & \theta_{x1} & \theta_{y1} & w_2 & \theta_{x2} & \theta_{y2} & w_3 & \theta_{x3} & \theta_{y3} \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{bmatrix} N_1^{(0)} & N_2^{(0)} & N_3^{(0)} & N_1^{(1)} & N_2^{(1)} & N_3^{(1)} & N_1^{(2)} & N_2^{(2)} & N_3^{(2)} \end{bmatrix} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{bmatrix} N_1^{(0)} & N_2^{(0)} & N_3^{(0)} & N_1^{(1)} & N_2^{(1)} & N_3^{(1)} & N_1^{(2)} & N_2^{(2)} & N_3^{(2)} \end{bmatrix} \\ -2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \begin{bmatrix} N_1^{(0)} & N_2^{(0)} & N_3^{(0)} & N_1^{(1)} & N_2^{(1)} & N_3^{(1)} & N_1^{(2)} & N_2^{(2)} & N_3^{(2)} \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

曲げモーメント M_x, M_y 及び捩りモーメント M_{xy} は、次式によって表される。

$$\boldsymbol{\sigma}_b = \mathbf{D}_b \boldsymbol{\varepsilon}_b \quad (3-17)$$

ここに、

$$\boldsymbol{\sigma}_b = \begin{bmatrix} M_x & M_y & M_{xy} \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{D}_b = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix}$$

(3-16),(3-17)式を用いて仮想仕事の原理を適用すると、最終的に次式の剛性マトリクスが得られる。

$$\mathbf{k}_b = \int \int \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dx dy \quad (3-18)$$

3.4 最適化問題の設定

3.4.1 曲線長さ指定の制約条件

1.3節では、幾何学的な拘束条件として曲面の表面積を指定する制約条件を導入した。曲面を点支持する Fig. 3-1 に示したような曲面では、たとえ表面積を指定しても表現可能な形状の範囲は広い。本節では、探索空間を狭め収束性の向上を図るために、さらに幾何学的な拘束条件を付加する。

新たに導入される拘束条件は、曲面上に適宜配置された曲線の長さを指定する制約条件とする。離散化された曲面では、曲線の長さは曲線上に節点を持つ三角形要素の辺長の総和として表される。曲線 p 上に辺を持つ要素の集合を V^p とし、要素 e の曲線 p 上の辺長を l_e^p と表す (Fig.3-3)。制約条件は次式によって表すことができる。

$$\sum_{e \in V^p} l_e^p - L_0^p = 0 \quad (3-19)$$

ここに L_0^p は曲線の指定長さを表す。

制御点位置ベクトル \mathbf{p} を設計変数とし、(1-8)式の問題に(3-19)式の制約条件を加え、最適化問題を次式のように設定する。

$$\begin{aligned} \text{Objective Function} \quad f(\mathbf{p}) &= \sum_{e=1}^M \mathbf{d}_e^T \mathbf{G} \mathbf{d}_e \quad \rightarrow \text{Minimize} \\ \text{Subject to} \quad c_1(\mathbf{p}) &= \sum_{e=1}^M S_e - S_0 = 0 \\ c_{p+1}(\mathbf{p}) &= \sum_{e \in V^p} l_e^p - L_0^p = 0 \quad (p = 1, \dots, N_p) \end{aligned} \quad (3-20)$$

ここに、 $\mathbf{G} = \int \int \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dx dy$ であり、 N_p は長さを指定する曲線の総数を表す。

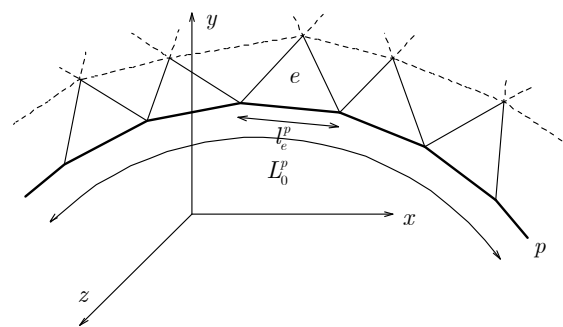


Fig.3-3 曲線長さ指定の制約条件

3.4.2 最適性必要条件

問題(3-20)式に対する Lagrange 関数を次式のように定義する。

$$L(\mathbf{p}, \boldsymbol{\mu}) = f(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{N_p+1} \mu_i c_i(\mathbf{p}) = \sum_e^M \mathbf{d}_b^T \mathbf{G} \mathbf{d}_b + \mu_1 \left(\sum_e^M S_e - S_0 \right) + \sum_{p=1}^{N_p} \mu_{p+1} \left(\sum_{e \in V^p} l_e^p - L_0^p \right) \quad (3-21)$$

ここに、 $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \dots, \mu_{N_p+1}]^T$ は Lagrange 乗数を表す。上式を未知変数 \mathbf{p} 及び $\boldsymbol{\mu}$ で偏微分することで、問題(3-20)式の最適性必要条件は次式で表すことができる。

$$\frac{\partial L(\mathbf{p}, \boldsymbol{\mu})}{\partial p_{\alpha j}} = \sum_k^{m'} \sum_l^{n'} \left\{ \sum_e^M \left(\frac{\partial \mathbf{d}_b^T}{\partial r_{\alpha kl}} \mathbf{G} \mathbf{d}_b + \mathbf{d}_b^T \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial r_{\alpha kl}} \mathbf{d}_b + \mathbf{d}_b^T \mathbf{G} \frac{\partial \mathbf{d}_b}{\partial r_{\alpha kl}} \right) + \mu_1 \sum_e^M \frac{\partial S_e}{\partial r_{\alpha kl}} + \sum_p^{N_p} \left(\mu_{p+1} \sum_{e \in V^p} \frac{\partial l_e^p}{\partial r_{\alpha kl}} \right) \right\} \frac{\partial r_{\alpha kl}}{\partial p_{\alpha j}} = 0$$

$$(\alpha = x, y, z)(i = 1, \dots, m)(j = 1, \dots, n)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{p}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_1} = \sum_e^M S_e - S_0 \quad (3-22)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{p}, \boldsymbol{\mu})}{\partial \mu_{p+1}} = \sum_{e \in V^p} l_e^p - L_0^p = 0 \quad (p = 1, \dots, N_p)$$

本問題は、上式を満たす制御点位置ベクトル \mathbf{p} 及び Lagrange 乗数 $\boldsymbol{\mu}$ を求める問題として扱われる。これまでと同様、最適化手法には逐次二次計画法を採用する。前章の問題と異なり、制約条件が複数与えられているが、1.5 節で示した方法を拡張するのは容易であるので、詳細は省略する。また、最適化時には 1.6 節に示したように三角形平面要素における各種マトリクス of \mathbf{r} による微分マトリクスが必要となるが、これらの詳細については付録 B にまとめて示す。また、分布外力は等価節点力として与えるものとし、自重などの形状の関数となる外力については、 \mathbf{r} による微分を行い感度を評価する。これらの詳細についても付録 B に示す。

3.5 正方形平面を有するシェルの数値解析

解析モデルは、一辺の長さが20mの正方形平面を有し、隅角部でピン支持されたシェル構造物とする (Fig.3-4)。シェル厚は一様に0.1mとする。制御点はx-y平面に7×7の格子状に配置し、制御点のz座標を設計変数とする。対称性を考慮して1/4の部分を解析対象とし、要素分割は128要素とする (Fig. 3-4 右図)。シェルの隅角部は切り欠いており、隅角部に配置された3節点をピン支持する。外力は単位体積重量を24 kN/m³として自重を作用させる。ヤング率を21 GPa、ポアソン比を0.17とする。

幾何学的な制約条件として曲面表面積 S_0 及び、自由端の曲線長さ L_0^1, L_0^2 (Fig. 3-4 右図太線部分) を指定する。指定表面積は1/4の部分に対して107.5m²とし、自由端の曲線長さをTable 3-1に示す値を指定した6つのケースについてそれぞれ最適化を行う。

case 1～6の解析により得られたシェル形状をそれぞれFig. 3-5-2～Fig. 3-5-7に示す。また、比較の対象として、同一表面積 (107.5m²) をもつ裁断球形シェルの形状をFig. 3-5-1に示す。最終形状の制御点z座標をTable3-2に示す。

また、裁断球形シェル及びcase 1～6の解析による最終形状における、シェル中立面の膜応力、および曲げモーメントによる縁応力の主応力図をFig. 3-6-1～7にそれぞれ示す。各主応力図にお

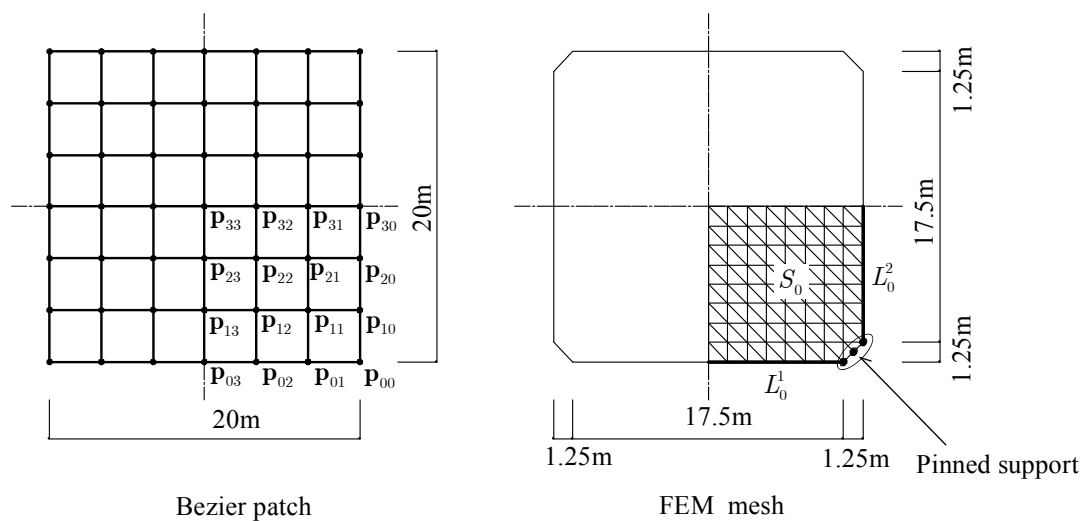


Fig.3-4 解析モデル

Table 3-1 指定表面積及び指定曲線長さ

	case 1	case 2	case 3	case 4	case 5	case 6
S_0 (m ²)	107.5	107.5	107.5	107.5	107.5	107.5
L_0^1 (m)	90.0	94.0	98.0	102.0	94.0	90.0
L_0^2 (m)	90.0	94.0	98.0	102.0	98.0	102.0

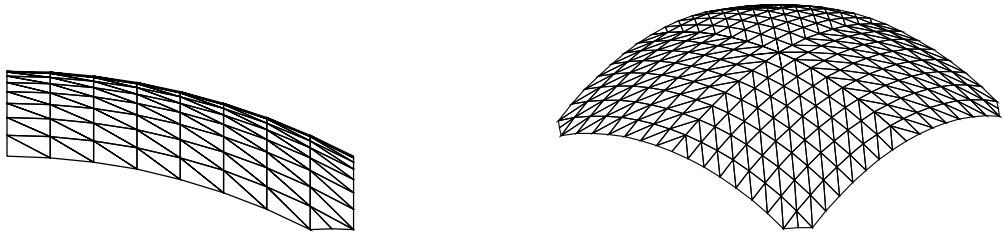


Fig. 3-5-1 シェル形状 (裁断球殻)

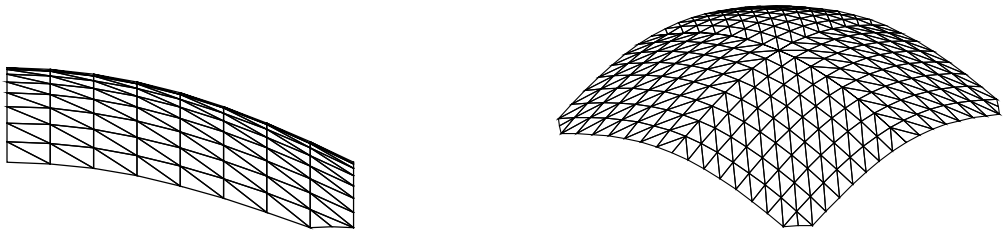


Fig. 3-5-2 シェル形状 (最終形状, case 1)

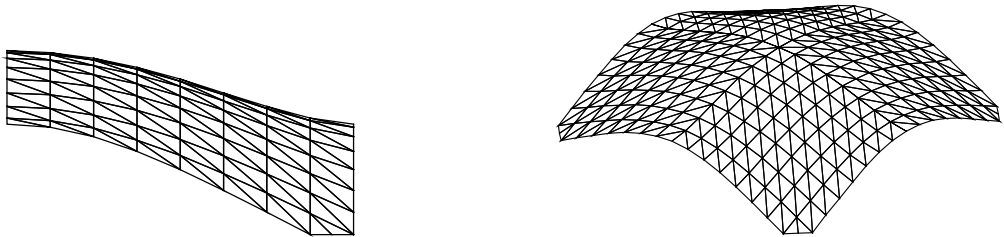


Fig. 3-5-3 シェル形状 (最終形状, case 2)

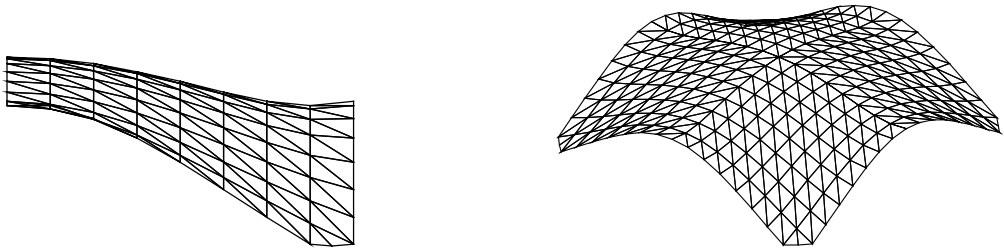


Fig. 3-5-4 シェル形状 (最終形状, case 3)

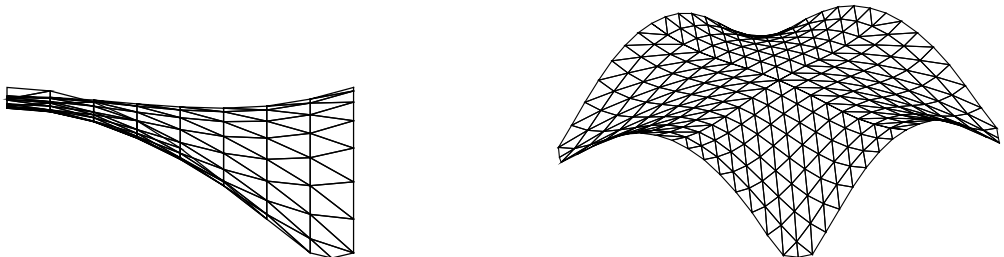


Fig. 3-5-5 シェル形状 (最終形状, case 4)

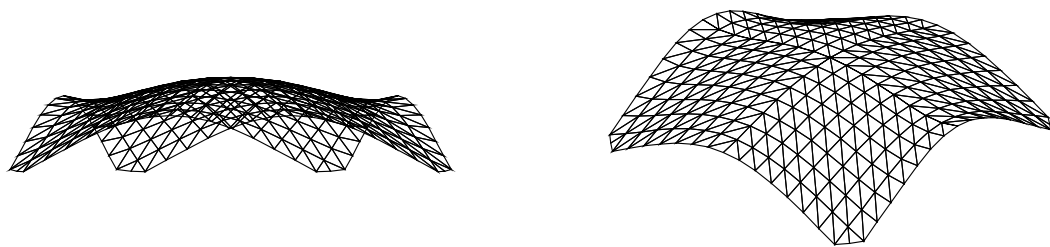


Fig. 3-5-6 シェル形状 (最終形状, case 5)

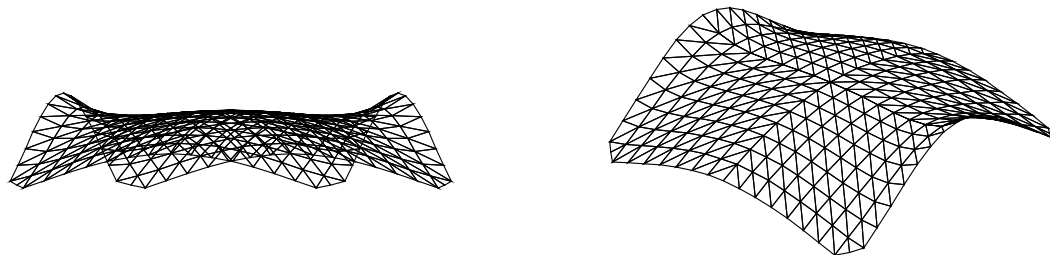


Fig. 3-5-7 シェル形状 (最終形状, case 6)

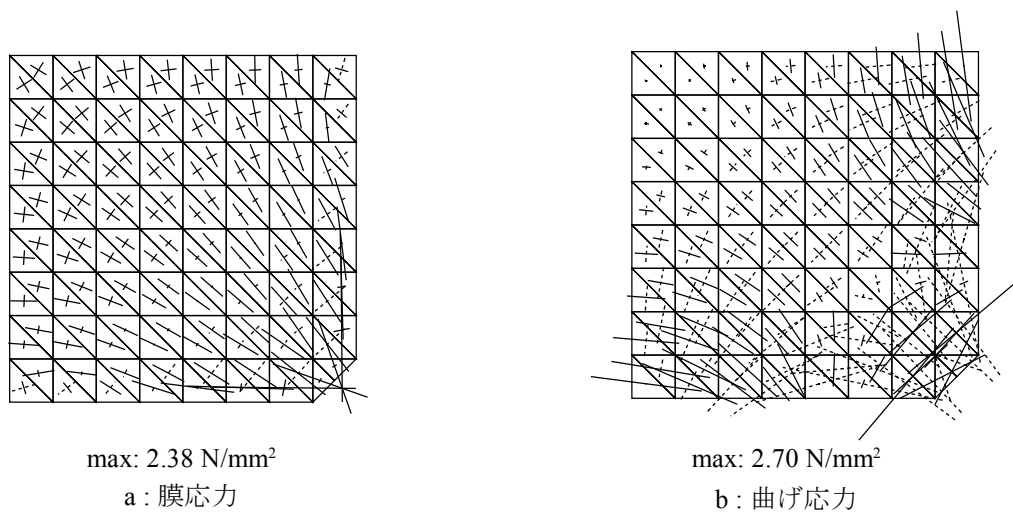


Fig.3-6-1 主応力図 (裁断球殻)

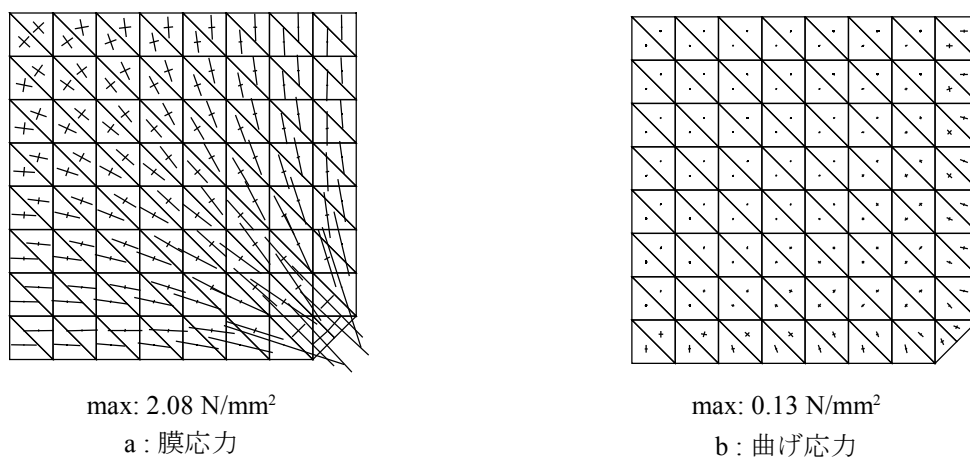
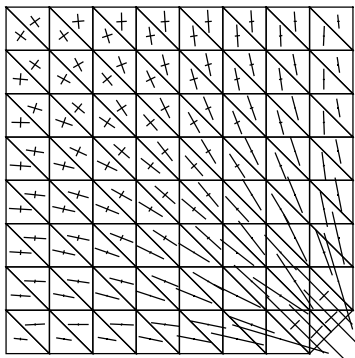
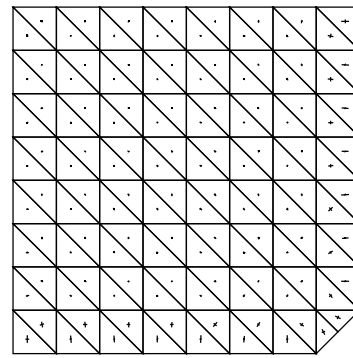


Fig.3-6-2 主応力図 (最終形状, case 1)



max: 1.75 N/mm²

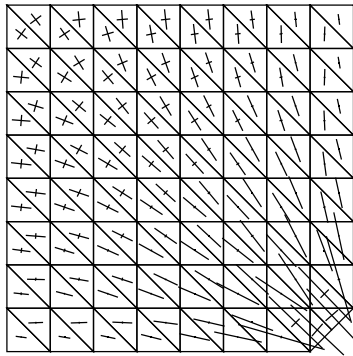
a: 膜応力



max: 0.11 N/mm²

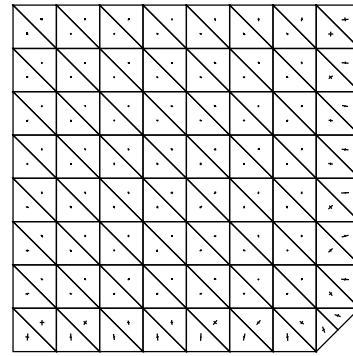
b: 曲げ応力

Fig.3-6-3 主応力図 (最終形状, case 2)



max: 1.63 N/mm²

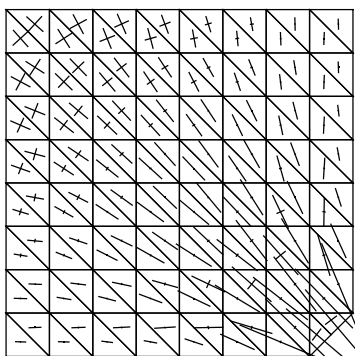
a: 膜応力



max: 0.10 N/mm²

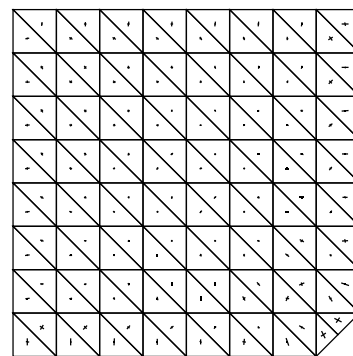
b: 曲げ応力

Fig.3-6-4 主応力図 (最終形状, case 3)



max: 1.66 N/mm²

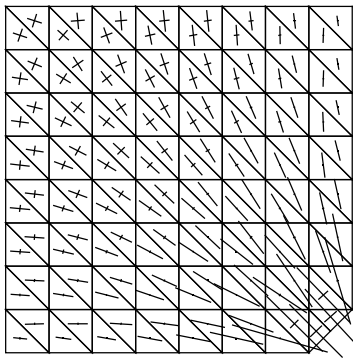
a: 膜応力



max: 0.11 N/mm²

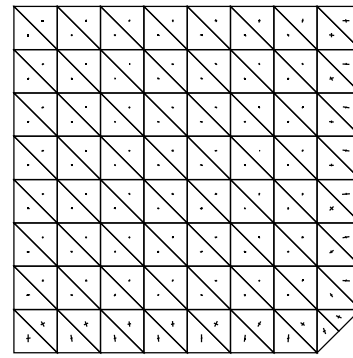
b: 曲げ応力

Fig.3-6-5 主応力図 (最終形状, case 4)



max: 1.75 N/mm²

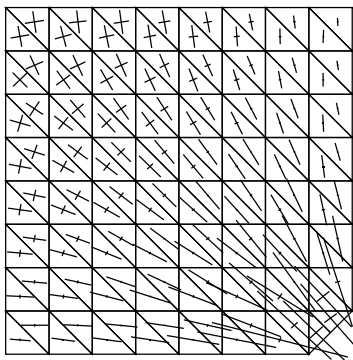
a : 膜応力



max: 0.11 N/mm²

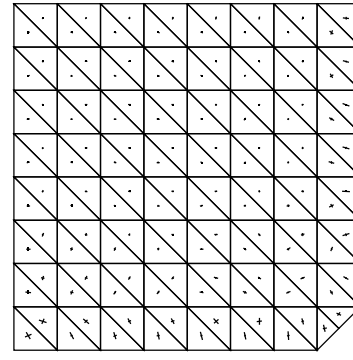
b : 曲げ応力

Fig.3-6-6 主応力図 (最終形状, case 5)



max: 2.29 N/mm²

a : 膜応力



max: 0.13 N/mm²

b : 曲げ応力

Fig.3-6-7 主応力図 (最終形状, case 6)

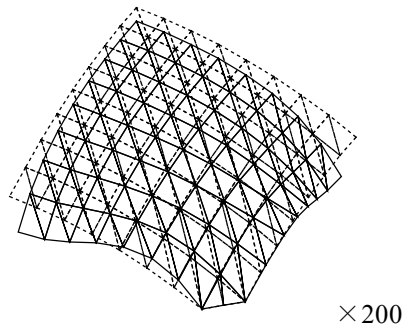


Fig.3-7-1 変位性状 (裁断球殻)

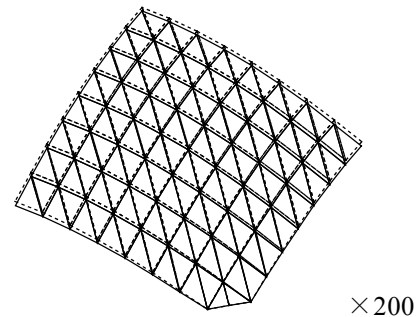


Fig.3-7-2 変位性状 (最終形状, case 1)

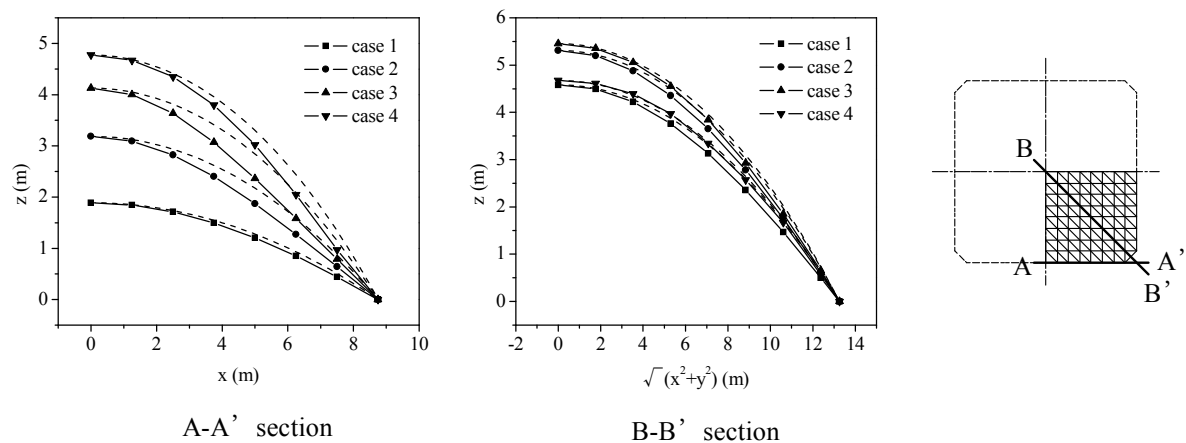


Fig.3-8 断面形状の比較

いて、実線は圧縮応力を、点線は引張応力を表す。また、図中に **max** として示した値は、各要素図心における応力のうちで最大の値を示している。

また、裁断球形シェル及び **case 1** ~ **6** の解析による最終形状における自重作用時の変形の様子を Fig. 3-7-1 ~ 7 にそれぞれ示す。図は 1/4 の部分を表しており、点線は荷重作用前の形状を、実線は荷重作用時の変位を 200 倍にして表した形状を示している。

case 1 ~ **4** の最適化による最終形状の違いを比較すると、自由端の曲線長さに 94m 以上の値を指定した **case 2, 3, 4** の結果では、自由端付近に曲面中央とは逆向きの曲率（反り）を生じている（Fig. 3-5-2 ~ 5）。各最終形状の主応力図を見ると、いずれの形状も裁断球形シェルと比べ、曲げ応力が非常に小さくなっており、シェル全面においてほぼ膜応力状態となっていることが確認できる（Fig. 3-6-1 ~ 5）。最終形状の膜応力図は、いずれのケースにおいても圧縮力が支持部に向かって滑らかに流れるように分布している。また、シェル形状からも理解できるように、自由端のライズが高くなるにつれて圧縮力はシェルの対角線上に一端集まり、その後支持点に向かって流れる傾向が確認できる。裁断球形シェルでは、支持部付近に引張応力を生じているが、最終形状ではシェル全面で圧縮応力を生じている。また、Fig. 3-7-1 ~ 5 より最終形状における変位は裁断球形シェルと比べ小さく、面外変形を殆ど生じていないことがわかる。また、**case 1** ~ **4** の最終形状の自由端及び支持点を結ぶ対角線上の形状の比較を Fig. 3-8 に示した。図中には、参考として同ライズを持つ懸垂線を細い点線で記入してある。

自由端の二つの曲線長さ L_0^1, L_0^2 に対しそれぞれ異なった長さを指定した **case 5, 6** の結果においても、同じ傾向が見られる。対角線に対し非対称な形状になっているにもかかわらず、曲げ応力の最大値は対称形状の **case 1** ~ **4** の場合と同程度の値を示しており、シェル全面でほぼ膜応力状態となっていることが確認できる（Fig. 3-6-6, 7）。

以上の結果から、点支持されたシェルでは、自重に対し曲げモーメントを生じない形状は唯一ひとつでなく、膜力の立体的な流れに応じた様々な形状があることがわかる。

3.6 異形平面を有するシェルの数値解析

様々な平面形状を有する点支持されたシェルの形状最適化を行う。解析モデルは、Fig.3-9-1,2に示す model A, model B の2種類とする。model Aは境界に位置する制御点を半径 14.142 m の円周上に配置したモデルである。model Bはx方向スパン 50m、y方向スパン 20mの長方形平面を有し、y方向の制御点座標を放物線上に配置したモデルである。両モデルとも、実際の曲面の境界は Bezier 曲面の性質上、円や放物線から若干のずれを生じている (Fig.3-9 右図)。

両モデルともに、ヤング率を 21GPa、ポアソン比 0.17、シェル厚を 0.1m とし、外力は単位体積重量を 24 kN/m³ として自重を作用させる。設計変数は支持点に位置する制御点を除く各制御点の z 座標とする。model A の指定表面積 S_0 を 160.0m² とし、指定曲線長さは Fig.3-9-1 中に太線で示した境界の長さ L_0^1, L_0^2 をともに 11.0m とする。同様に model B の指定表面積 S_0 は 224.0m² とし、指定曲線長さは $L_0^1=23.2m, L_0^2=12.4m$ とする。

model A の最終形状を Fig.3-10-1 に、膜応力及び曲げモーメントによる縁応力の主応力図を Fig. 3-11-1 に示す。同様に、model B の最終形状を Fig.3-10-2 に、主応力図を Fig. 3-11-2 に示す。いずれのモデルに対しても、膜応力に比べ曲げ応力が極端に小さいことが確認できる。様々な平面形状を有する曲面に対しても、曲げモーメントの発生を抑えた曲面を得ることが可能であることがわかる。

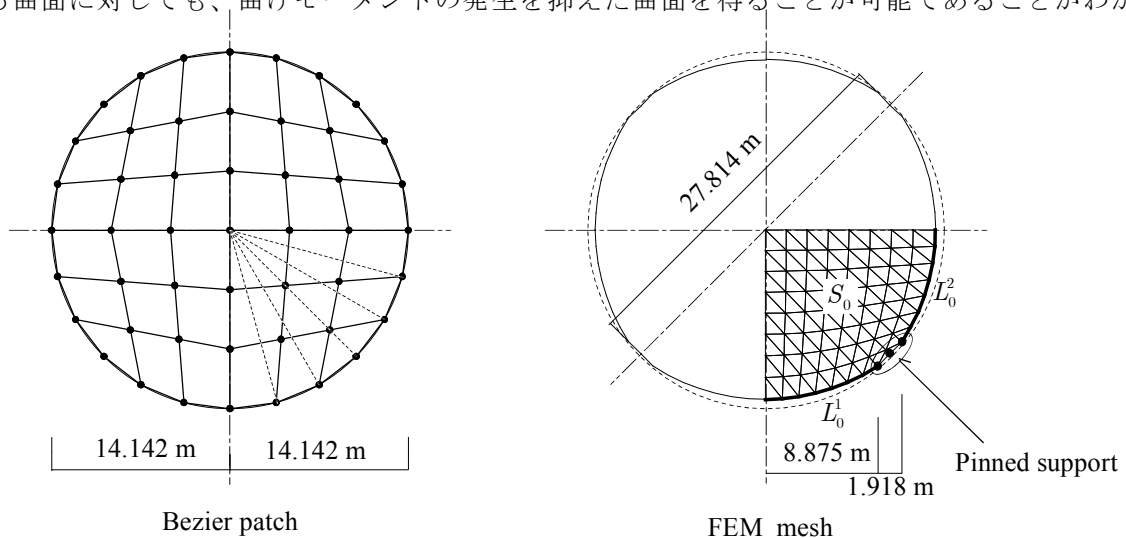


Fig.3-9-1 model A

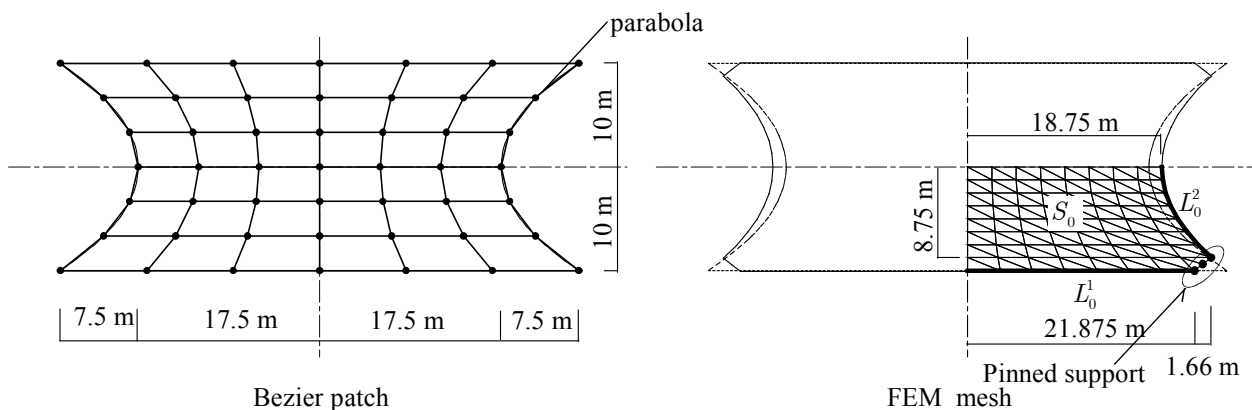


Fig.3-9-2 model B

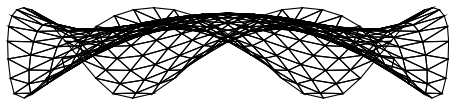
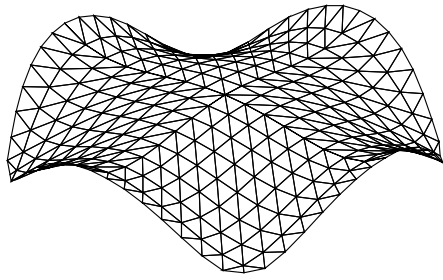


Fig.3-10-1 model A : 最終形状

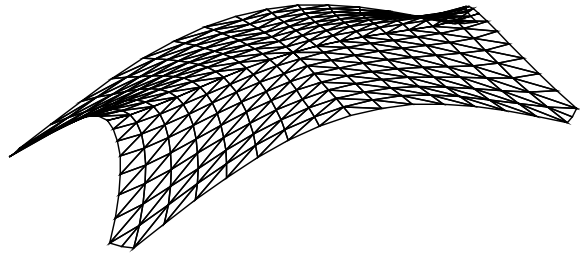
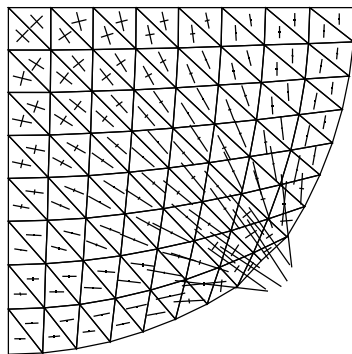
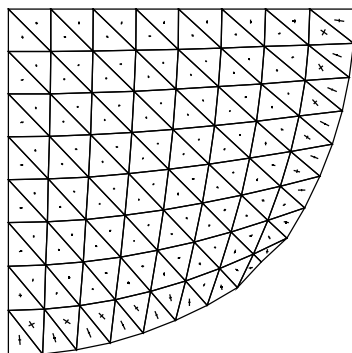


Fig.3-10-2 model B : 最終形状



max: 1.93 N/mm²

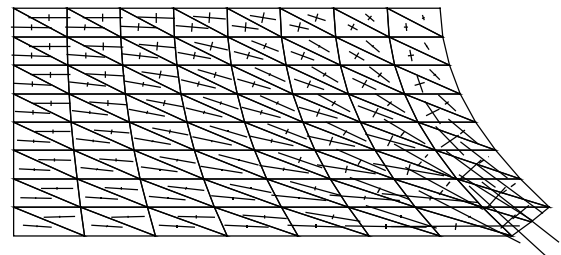
a: 膜応力



max: 0.16 N/mm²

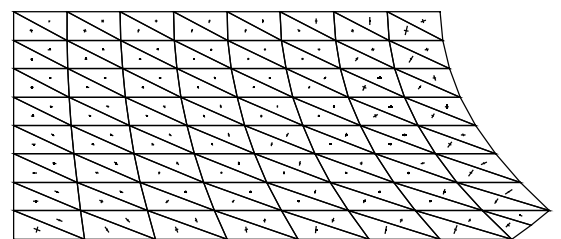
b: 曲げ応力

Fig.3-11-1 主応力図 (model A : 最終形状)



max: 3.23 N/mm²

a: 膜応力



max: 0.19 N/mm²

b: 曲げ応力

Fig.3-11-2 主応力図 (model A : 最終形状)

3.7 数値解析結果の考察

3.7.1 境界条件の影響

前節までに示した数値解析例では支持条件を全て理想的なピン支持とした。通常この形式の鉄筋コンクリートシェルでは支持点間をタイブームで結ぶことで水平反力を得ており、実際には支持部にはある程度の曲げ剛性を有する。ここでは、支持条件の違いによる最終形状の応力の変化について簡単な調査を行う。

3.5節で得られた case 3 の最終形状 (Fig.3-12) に対して、最適化時とは異なる境界条件を与えて改めて応力算定を行う。与える境界条件は、Fig.3-13 に示す2種類とする。固定支持は、支持点の固定度の影響を、周辺単純支持は他の設計外力に抵抗するために縁梁を設けた場合の影響を調査することを目的としている。

これら異なる支持条件に対して得られた主応力図をそれぞれ膜応力を Fig.3-14-1 に、曲げ応力を Fig.3-14-2 示す。各図は、比較のためにピン支持とした場合の結果も同時に示している。

固定支持とした場合、曲げ応力は殆ど生じておらず、応力分布は膜応力、曲げ応力ともにピン支持の場合とほぼ同じ結果を示している。曲面が点支持されているため、曲面の形状自体には支持点付近の変位を拘束するような効果は有していない。支持点の反力がほぼ曲面に沿った方向を向いていれば、支持点の固定度の違いは曲げモーメントの分布に大きな影響を与えないものと考ええる。一方、周辺単純支持とした場合では、曲面の広い範囲に若干の曲げ応力が発生している。

次に、これら2種類の境界条件を与えて最適化を行った場合の最終形状を Fig.3-15 に示す。固定支持とした場合では、ピン支持の場合とほぼ同様の形状が得られている。周辺を単純支持とした場合では、隅角部付近で曲率が逆向きとなり、ピン支持の場合と大きく異なる形状となっている。

以上の結果から、支持点の固定度が解に与える影響は小さく、理想的なピン支持として最適化を行っても特に問題はないと考える。これに比べて縁梁の影響については、ここで与えた境界条件は極端な例であるものの、解に与える影響は比較的大きいものと考えられる。縁梁の剛性を考慮して最適化を行うのが望ましいと言える。

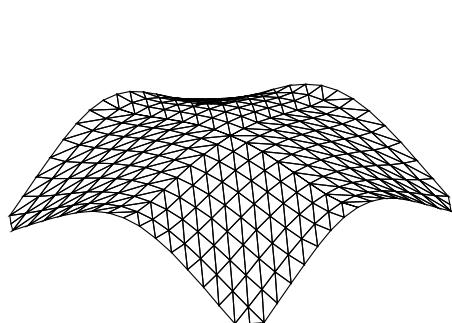


Fig.3-12 最終形状 (case 3)

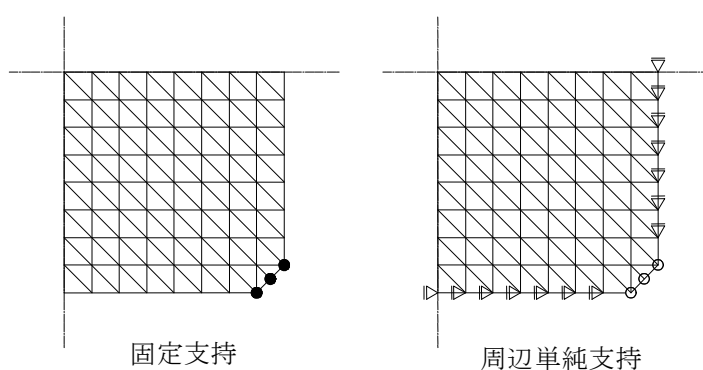


Fig.3-13 支持条件

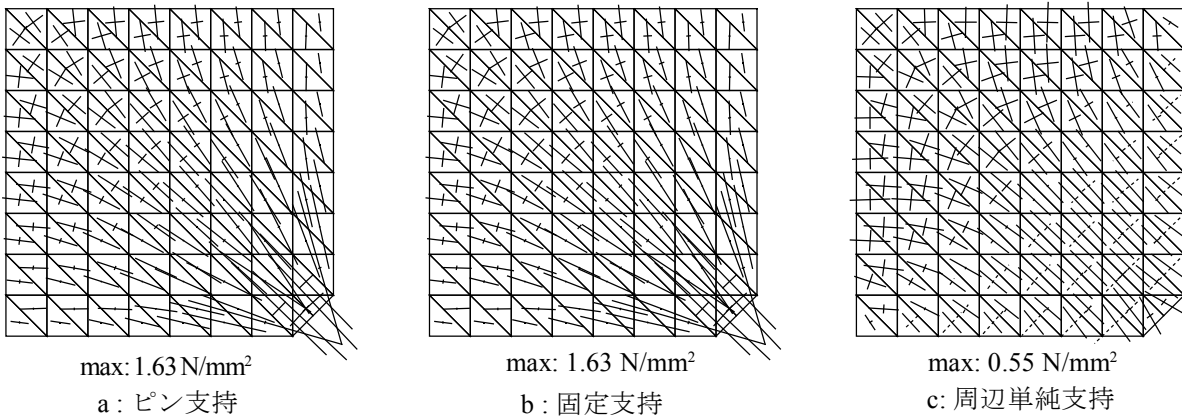


Fig.3-14-1 主応力図 (膜応力)

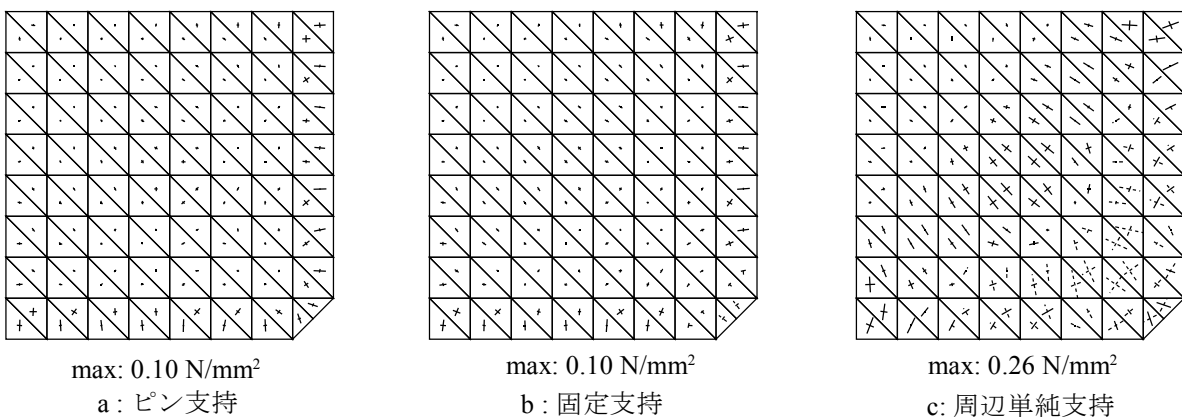


Fig.3-14-2 主応力図 (曲げ応力)

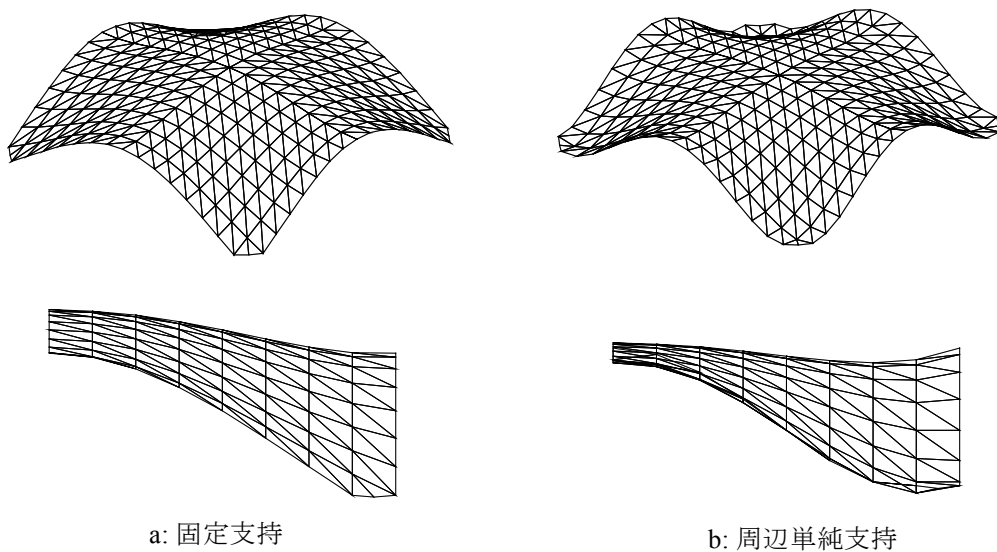


Fig.3-15 最終形状

3.8 3章のまとめ

任意な境界形状を持つシェルに対して、曲げモーメントの発生しない曲面形状を求めるために、曲面の表現にテンソル積ベジエ曲面を用い、応力算定時には三角形平面シェル要素によって曲面を離散化する方法を示した。4点ピン支持された自由曲面シェルに対して本手法を適用し、幾つかの数值解析例を示した。得られた主要な結果は以下のようにまとめられる。

- 1) 曲面の数箇所で点支持されたシェルでは、自重に対して曲げモーメントを生じない形状は、唯一ひとつでなく、膜力の立体的な流れに応じた様々な形状がある。
- 2) ここで示した形状決定法は、様々な平面形状の曲面に対しても適用可能である。

1)に述べている結果は、自重に対し曲げモーメントを発生させずに、更にデザインや、他の外力に対しても抵抗性の高いものを選択するだけの自由度を持つ場合があることを意味している。

前章で示した軸対称シェルでは、境界がすべて支持されるために、二次元的なアーチ効果によって曲面の広い範囲でほぼ膜応力状態であり、形状修正による曲げモーメント分布の変化は主に境界付近にのみに影響を与える。一方、本章で扱ったシェルは、点支持されているために二次元的なアーチ効果は得られず、形状修正による曲げモーメント分布の変化は大域的である。本章で得られた形状は、力の流れそのものを表現しており、自然な形状である。

4.2.3 制約条件

非線形計画法を用いて最小解の探索を行うに当たって、探索空間を狭め解析効率を向上させるとともに、初期値近傍の現実的な解を得るために、制約条件を導入する。ここでは、幾何学的な拘束条件として、部材長の総和を指定した値とする条件を与える。問題は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \text{Objective Function} \quad f(\mathbf{r}) &= \sum_{e=1}^M \mathbf{d}^T \mathbf{G} \mathbf{d} \quad \rightarrow \text{Minimize} \\ \text{Subject to} \quad c(\mathbf{r}) &= \sum_{e=1}^M l_e - L_0 = 0 \end{aligned} \quad (4-8)$$

ここに、 L_0 は指定する部材長総和を表す。

本論文中では曲面形状に着目しているため、部材断面は一様とする。この場合、上式の制約条件は構造材の体積を一定とする条件を意味する。

4.2.4 最適性必要条件

(4-8)式の問題に対するLagrange関数を次式のように定義する。

$$L(\mathbf{r}, \mu) = f(\mathbf{r}) + \mu c(\mathbf{r}) = \sum_{e=1}^M \mathbf{d}^T \mathbf{G} \mathbf{d} + \mu \left(\sum_{e=1}^M l_e - L_0 \right) \quad (4-9)$$

ここに μ はLagrange乗数を表す。上式を \mathbf{r} 及び μ で偏微分することで、問題(4-8)式の最適性必要条件は次式で表すことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mu)}{\partial r_{\alpha i}} &= \sum_{e=1}^M \left(\frac{\partial \mathbf{d}^T}{\partial r_{\alpha i}} \mathbf{G} \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial r_{\alpha i}} \mathbf{d} + \mathbf{d}^T \mathbf{G} \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial r_{\alpha i}} \right) + \mu \sum_{e=1}^M \frac{\partial l_e}{\partial r_{\alpha i}} = 0 \quad (\alpha = x, y, z)(i = 1, \dots, N_r) \\ \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mu)}{\partial \mu} &= \sum_{e=1}^M l_e - L_0 = 0 \end{aligned} \quad (4-10)$$

本問題は、(4-10)式を満たす節点位置ベクトル \mathbf{r} 及びLagrange乗数 μ を求める問題として扱われる。問題の解法にはこれまでと同様に逐次二次計画法を採用する。具体的な計算手順や変位ベクトルの感度解析方法等は1章と同様である。各種マトリクス \mathbf{r} による微分マトリクスの詳細を付録Cに示す。

4.3 二方向格子シェルの数値解析

境界が矩形平面を有し、部材が格子状に配置されたモデルによる数値解析例を示す。初期形状の節“ $z = h(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$ ”次関数で与えるものとする。

$$z = h(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) \quad (4-11)$$

初期形状をスパン30m、ライズ6m ($a = 15, b = 15, h = 6/a^2b^2$) とする。部材断面は $\phi 114.3 \times 4.5$ の円形鋼管とし、ヤング率を210GPa、ポアソン比を0.3とする。外力として部材の自重 (0.122kN/m) が作用する場合についてモーメント分布の最小化を行う。解析は対称性を考慮し、Fig.4-2において斜線の引かれた全体の1/4の部分を対象に行う。制約条件の部材長総和は初期形状と同じ長さ191.011m (1/4の部分) を指定する。境界条件は、周辺を固定支持とした場合とピン支持とした場合の2種類についてそれぞれ解析を行う。

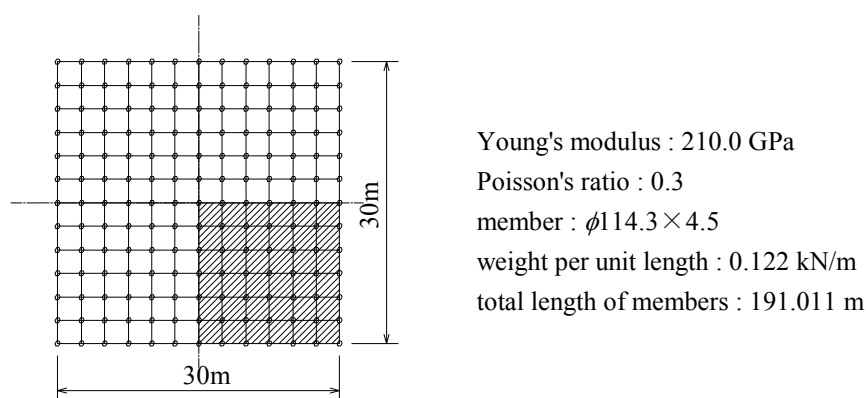


Fig. 4-2 解析モデル (二方向格子シェル)

境界を固定支持とした場合に得られた最終形状をFig.4-3-bに示す。比較のため、初期形状をFig.4-3-aに示す。また、初期形状及び最終形状の軸力分布をFig.4-4-a,bに、面外方向の曲げモーメント分布をFig.4-5-a,bにそれぞれ示す。各断面力の分布図はシェルの1/4の部分を示しており、図の右側及び下側が境界に対応する。尚、対称性を考慮した解析により、対称面上に配置された部材の断面力は1/2倍されている。境界をピン支持とした場合の最終形状及び断面力の分布図を、同様にFig.4-6～Fig.4-8に示す。

固定支持、ピン支持ともに最終形状は、初期形状と比べ支持部付近での曲率がより大きな形状に変化している。支持条件の違いによる最終形状の差は比較的小さく (Fig.4-3-b, Fig.4-6-b)、曲面全体の形状は比較的良く似ているが、両形状の立面図を比較することによって、面内の部材配置に幾らかの差を確認することができる。曲げモーメント分布 (Fig.4-5, Fig.4-8) を見ると、初期形状では連続体シェルで見られるのと同様の境界付近における曲げ応力の集中を確認することができるが、最終形状では曲面全体で曲げモーメントを殆ど生じていないことがわかる。

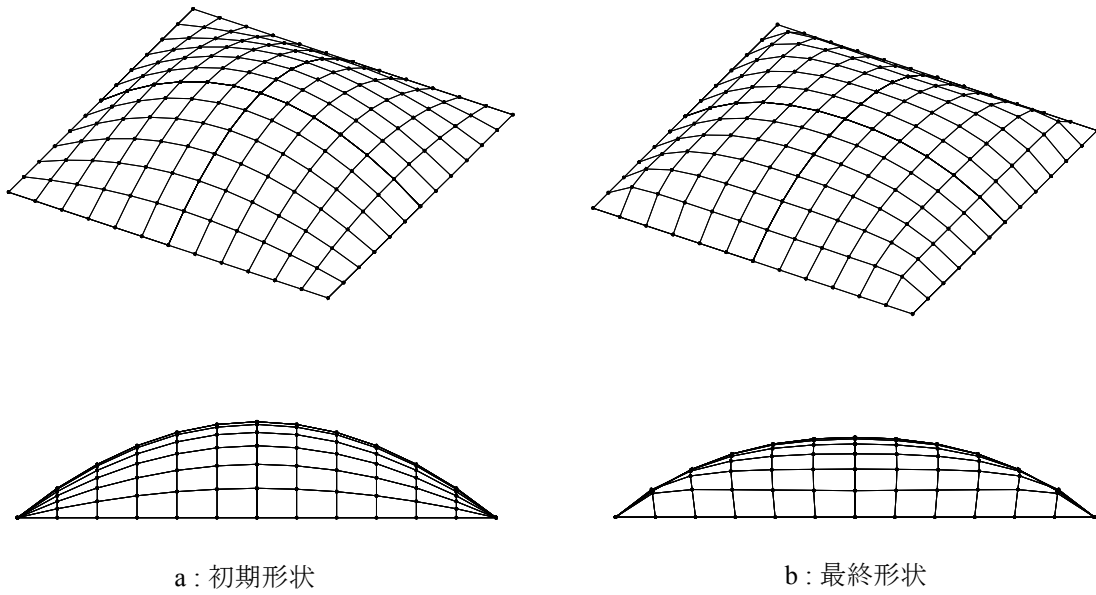


Fig. 4-3 シェル形状（周辺固定支持）

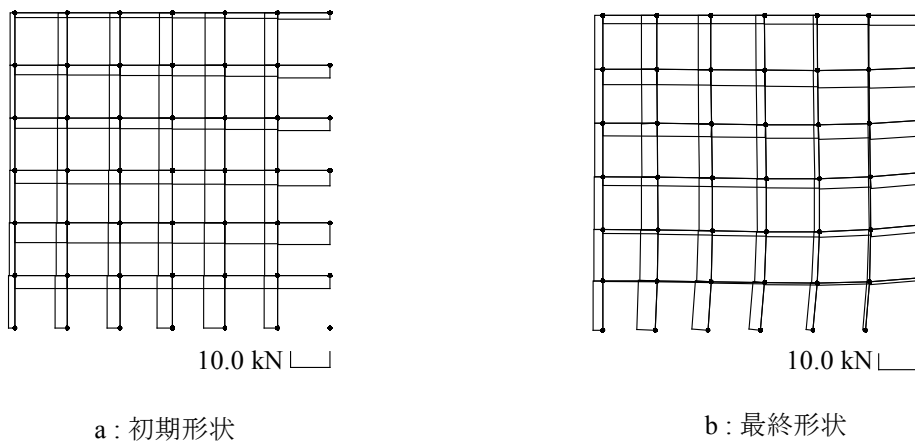


Fig. 4-4 軸力分布（周辺固定支持）

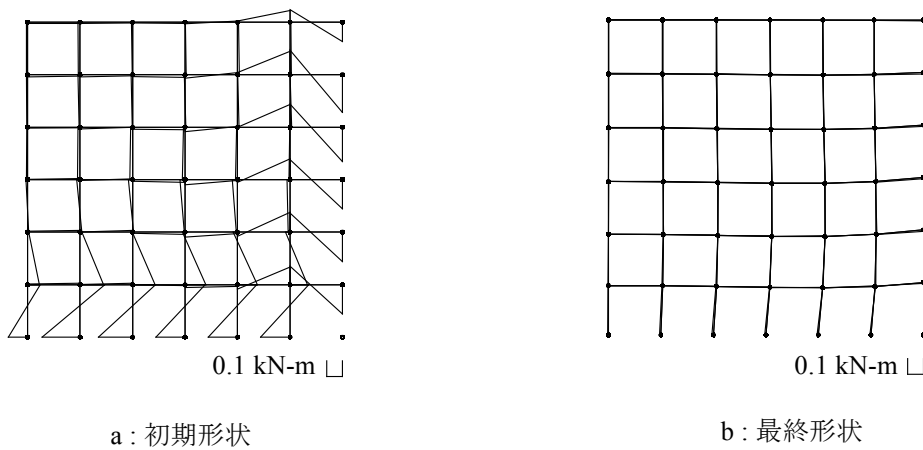


Fig. 4-5 面外方向曲げモーメント分布（周辺固定支持）

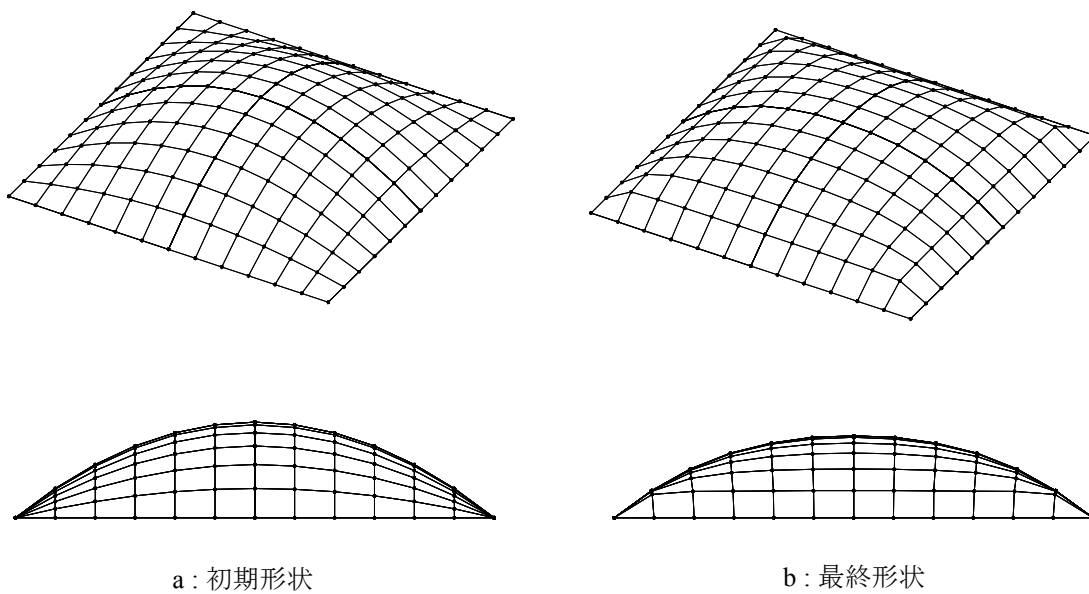


Fig. 4-6 シェル形状 (周辺ピン支持)

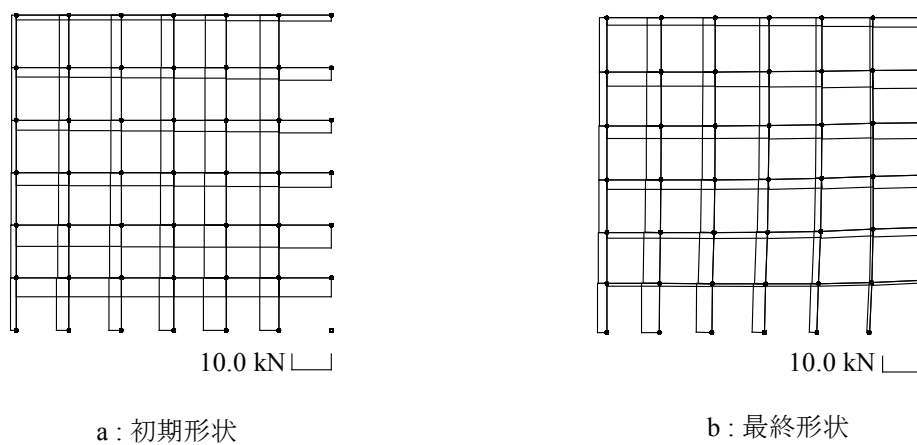


Fig. 4-7 軸力分布 (周辺ピン支持)

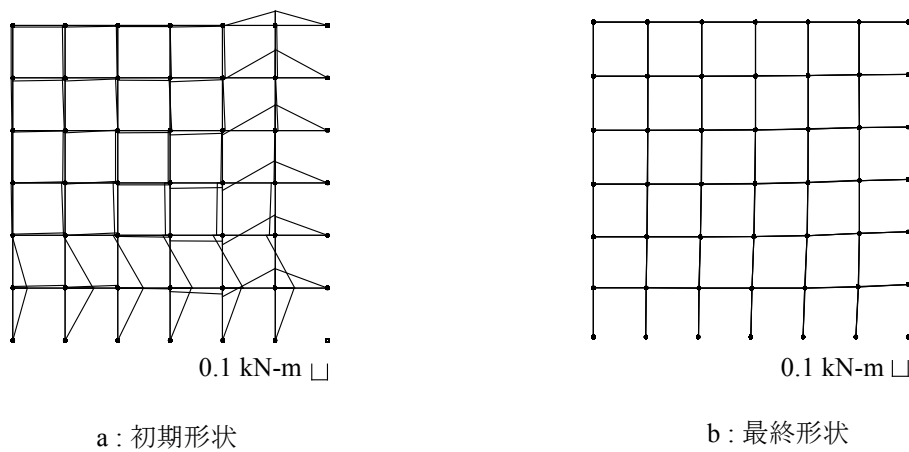


Fig. 4-8 面外方向曲げモーメント分布 (周辺ピン支持)

4.4 ラチスドームの数値解析

初期形状はスパン30m、ライズ6mの単層球形ラチスドームとする (Fig.4-9)。部材は $\phi 139.8 \times 4.5$ の円形鋼管とし、ヤング率を210GPa、ポアソン比を0.3とする。外力として部材の自重 (0.150kN/m) を作用させる。解析は対称性を考慮し、Fig.4-9において斜線の引かれた全体の1/2の部分を対象に行う。制約条件の部材長総和は初期形状と同じ長さの400.793m (1/2の部分) を指定する。支持条件は、周辺節点を固定とする。

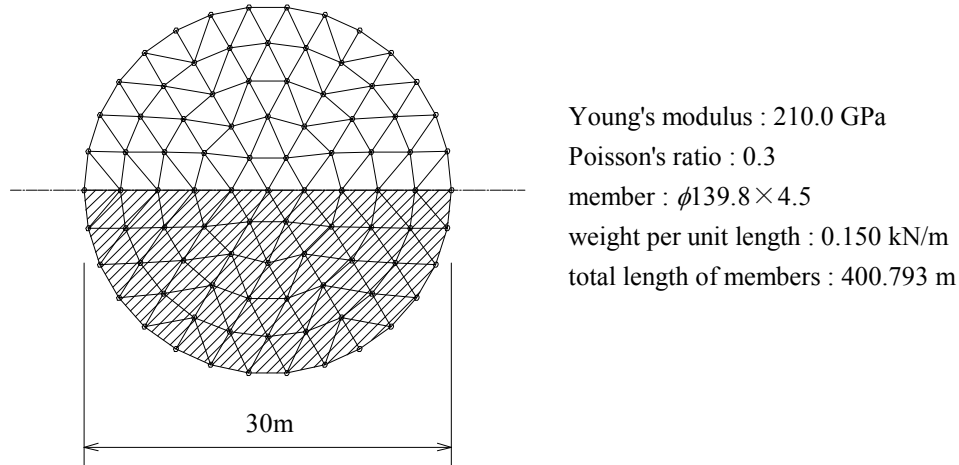


Fig. 4-9 解析モデル (単層ラチスドーム)

最適化により得られた最終形状をFig.4-10-bに、比較のため、初期形状をFig.4-10-aに示す。また、初期形状及び最終形状の軸力分布をFig.4-11-a,bに、面外方向の曲げモーメント分布をFig.4-12-a,bにそれぞれ示す。先の最適化と同様、対称面上の部材の断面力は1/2倍されている。

Fig.4-10から、最終形状は初期形状に対して、曲面の巨視的な曲率の変化の他に、曲面の面内における部材配置に大きな変化が見られる。即ち、初期形状では便宜的に与えられた60度毎のラメラパターンが、最終形状では60度のふれ角で配置された立体交差アーチパターンへ変化している。初期形状の曲げモーメント分布 (Fig.4-12-a) を見ると、曲げモーメントは主に、回転軸から60度毎に伸びたキールに沿って発生していることがわかる。連続体シェルに見られるような境界近傍の応力集中はこのモデルでは判然としない。このような曲げモーメントの分布は、連続体シェルでは見られない性質のものであり、曲面を直線材で構成したことに起因するものであると考えられる。一方、最終形状では、曲面全体で曲げモーメントを殆ど生じていないことがわかる (Fig. 4-12-b)。以上の結果から、先の部材配置の変化が、これまでに示したシェルとしての曲げモーメントの発生を抑えるものでなく、主にスペースフレームの曲面分割パターンによって付加的に発生したモーメントを抑えるためのものであると理解される。

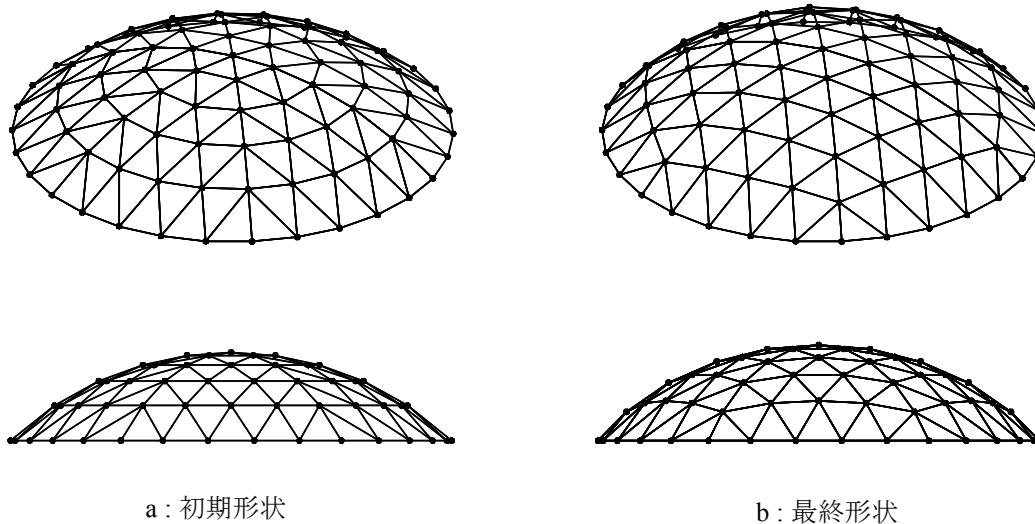


Fig. 4-10 ラチスドーム (周辺固定支持)

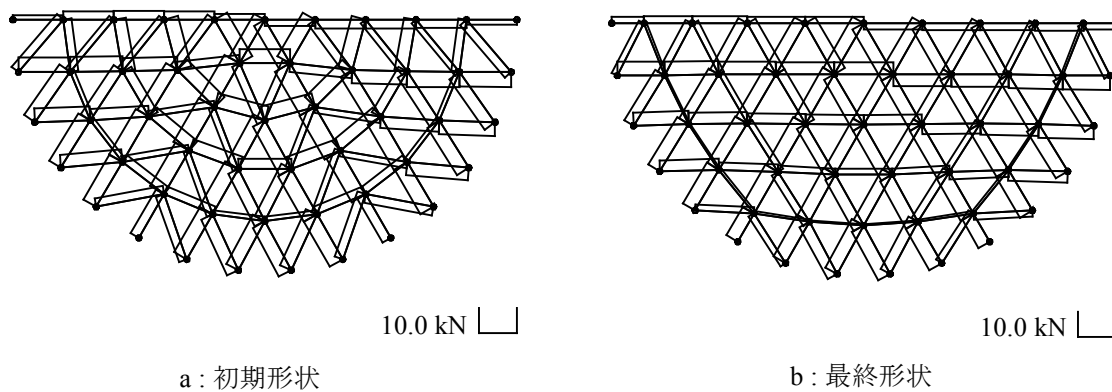


Fig. 4-11 軸力分布 (周辺固定支持)

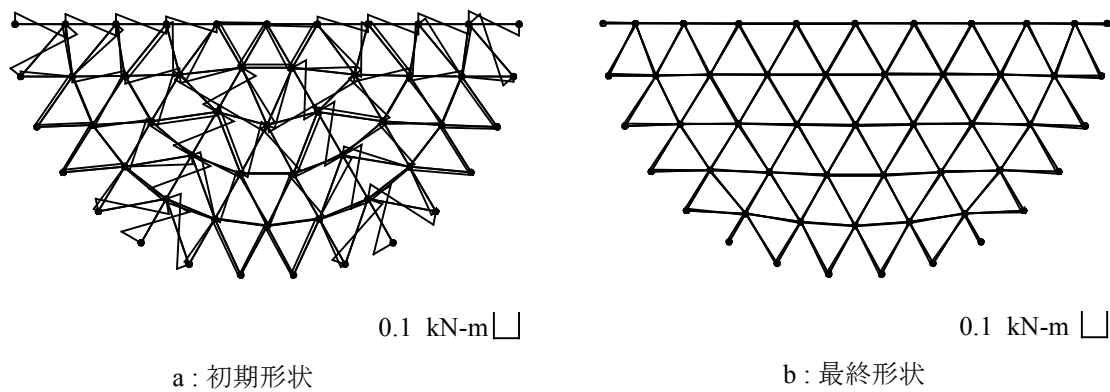


Fig. 4-12 曲げモーメント分布 (周辺固定支持)

4.5 分割パターンの異なるラチスシェルの数値解析

ここでは、4.3節で扱った格子シェルに対し、全体或いは部分的に斜め材を配置したモデルを用い、曲面の分割パターンが面外方向の曲げモーメントに与える影響について調査を行う。

初期形状の節点座標は(4-11)式により与え、スパンを30m、ライズを4mとする。4.3節同様、格子状に部材を配置し、さらに斜め材をFig.4-13のように付加したModelA～Cの3種類の場合についてそれぞれ最適化を行う。ModelAは対称性による1/4の部分に対し、すべての格子に同一方向に斜め材を配置したモデル、Model B、Model Cは、格子の一部に不規則に斜め材を配置したモデルである。

先と同様、部材断面は $\phi 14.3 \times 4.5$ の円形鋼管とし、ヤング率を210GPa、ポアソン比を0.3とする。外力として部材の自重 (0.122kN/m) を作用させる。制約条件の部材長総和は各モデルそれぞれ、初期形状と同じ長さ (Model A:316.533m, Model B:257.459m, Model C:246.632m) を指定する。支持条件は周辺節点を固定とする。

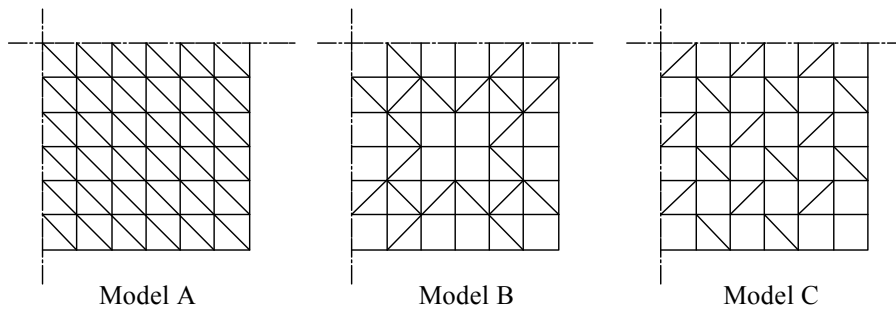


Fig. 4-13 解析モデル (1/4部分)

ModelAに対し、節点の形状修正の自由度をz方向のみとした場合の最終形状をFig.4-14-bに、x,y,z方向全てに自由度を持たせた場合の最終形状をFig.4-14-cに示す。また、比較のため初期形状をFig.4-14-aに示す。初期形状、z方向自由とした場合の最終形状、及びxyz方向自由とした場合の最終形状の3つの形状に対し、軸力の分布、面外方向曲げモーメント、面内方向曲げモーメント及び振りモーメントの分布をそれぞれFig.4-16～Fig.4-19に示す。なお、Fig.4-17,18,19の各モーメント図は、最終形状の値を初期形状に対して5倍のスケールで描いている。

z方向自由とした場合の最終形状では、先の二方向格子シェルの解析と同様に初期形状に比べて境界付近での曲率が大きくなり、曲面全体の形状は比較的大きく変化している。一方、xyz方向自由とした場合の最終形状では、曲率の変化と同時に曲面の分割パターンにも大きな変化が見られる。Fig.4-15-bは最終形状の平面図を表しており、斜めに配置した部材が、隣接する対称性1/4の部分の格子材に滑らかに連結するように、各節点が面内方向に大きく移動していることが確認できる。このため、面内方向に必要とされる部材長さは小さくなり、部材長総和を一定とする制約条件に従いライズが大きく上昇している。

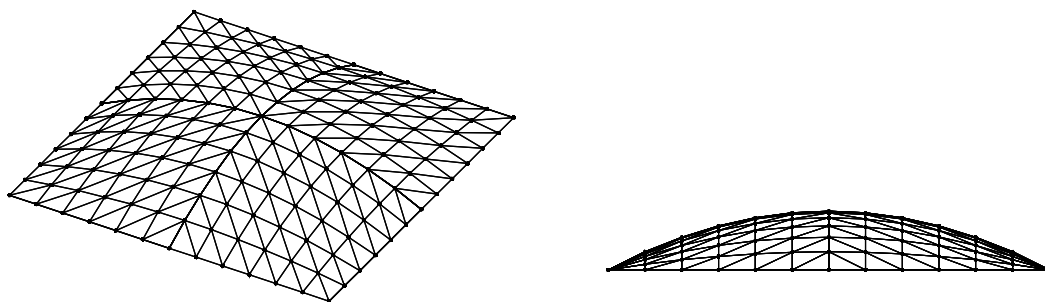


Fig. 4-14-a 初期形状

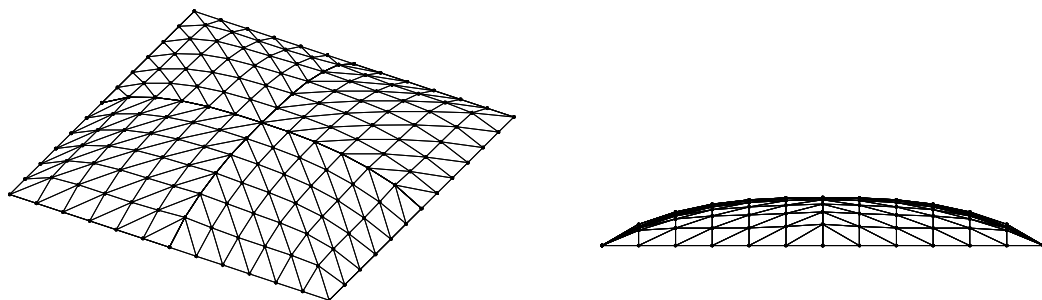


Fig. 4-14-b 最終形状 (固定支持 : z方向自由)

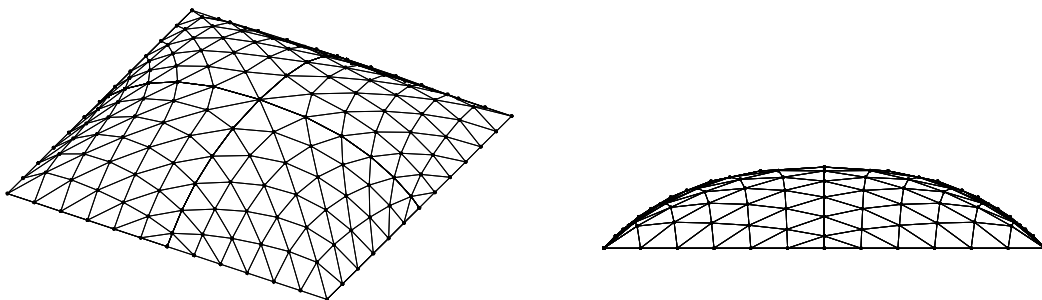


Fig. 4-14-c 最終形状 (固定支持 : xyz方向自由)

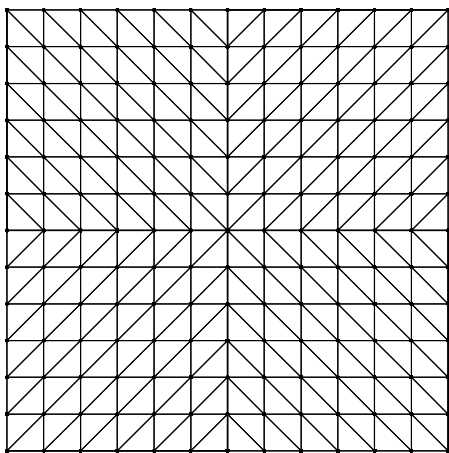
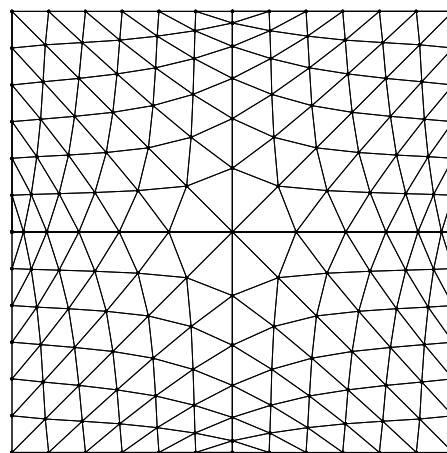
Fig. 4-15-a 初期形状及び
最終形状 (z方向自由) 平面図

Fig. 4-15-b 最終形状 (xyz方向自由) 平面図

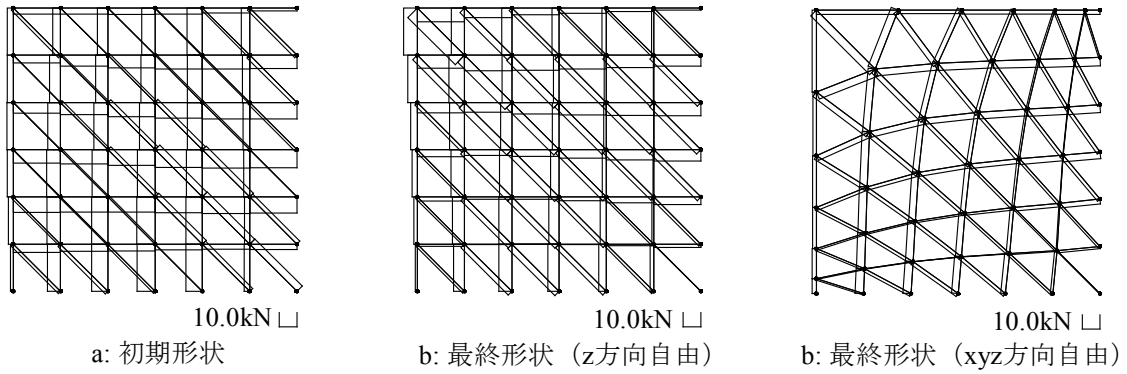


Fig. 4-16 応力図 (軸力)

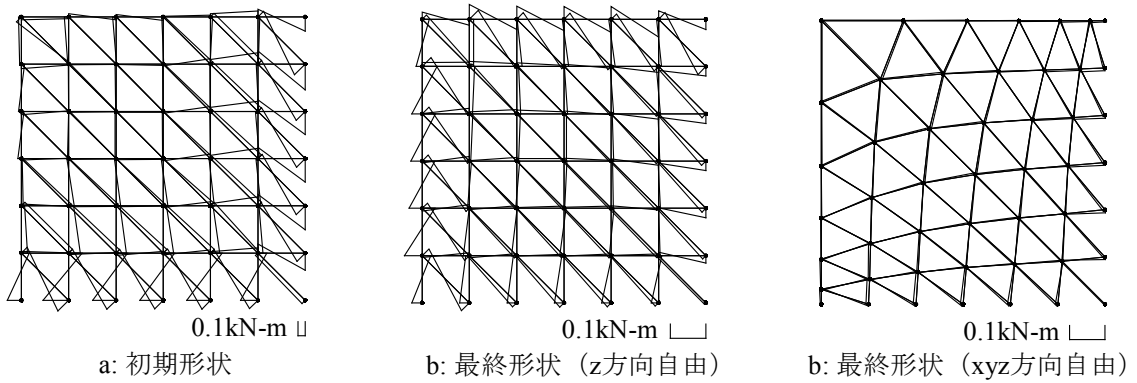


Fig. 4-17 応力図 (面外方向曲げモーメント)

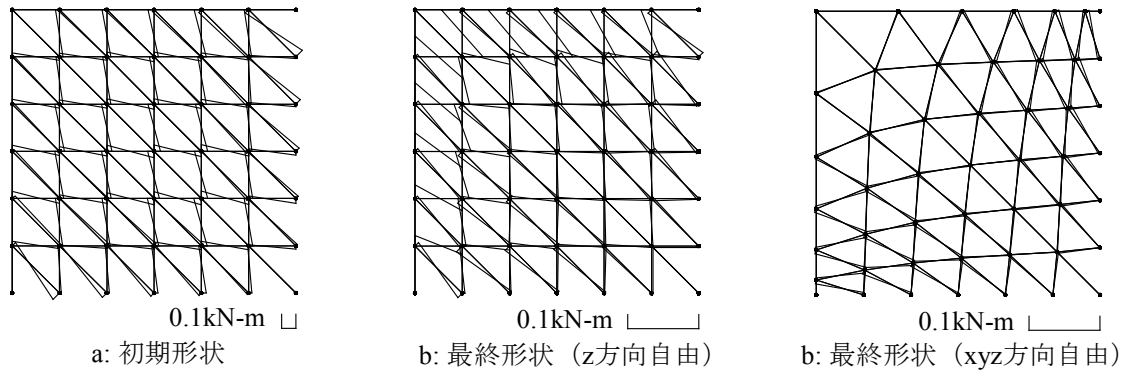


Fig. 4-18 応力図 (面内方向曲げモーメント)

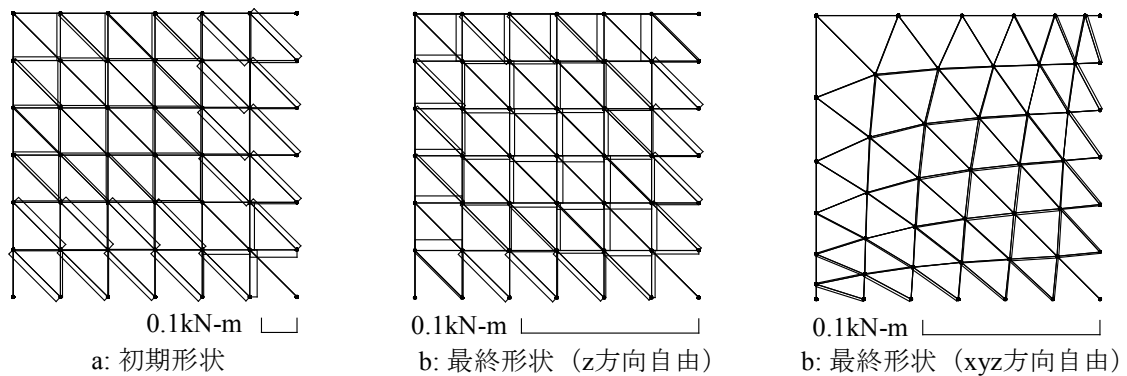


Fig. 4-19 応力図 (捩りモーメント)

面外方向の曲げモーメント図 (Fig.4-17) を見ると、初期形状では境界付近にシェル型の曲げモーメントの集中が確認できるが、z方向自由とした最終形状ではこれを大きく低減している。曲面全体に曲げモーメントのオーダーは小さくなっているが、対称面上に配置された部材付近に、先のラメラドームで見られたのと同種の、比較的大きな曲げモーメントを発生している（対称面上の断面力は1/2倍されている）。xyz方向自由とした最終形状では、対称面付近のこの曲げモーメントに対しても大きく低減しており、曲面全体で曲げモーメントを殆ど生じていないことが確認できる。面内方向の曲げモー

Table 4-1 各モーメント成分の最大値

Maximum Value	Initial Shape		Final Shape (z-free)		Final Shape (xyz-free)	
	(kN-m)	ratio	(kN-m)	ratio	(kN-m)	ratio
Bending Moment (out-of-plane)	0.4013	(1.00)	0.0991	(0.25)	0.0099	(0.02)
Bending Moment (in-plane)	0.0653	(1.00)	0.0303	(0.46)	0.0064	(0.10)
Twisting Moment	0.0218	(1.00)	0.0060	(0.27)	0.0014	(0.06)

Table 4-2 各モーメント成分の歪エネルギー

Strain Energy	Initial Shape		Final Shape (z-free)		Final Shape (xyz-free)	
	(J)	ratio	(J)	ratio	(J)	ratio
Bending Moment (out-of-plane)	3.310	(1.00)	0.102	(0.03)	0.005	(0.00)
Bending Moment (in-plane)	0.155	(1.00)	0.014	(0.09)	0.002	(0.01)
Twisting Moment	0.149	(1.00)	0.007	(0.05)	0.001	(0.00)

Table 4-3 各モーメント成分の最大値 (z座標スケーリング)

Maximum Value	Initial Shape		Final Shape (z-free)		Final Shape (xyz-free)	
	(kN-m)	ratio	(kN-m)	ratio	(kN-m)	ratio
Bending Moment (out-of-plane)	0.4013	(1.00)	0.0898	(0.22)	0.0232	(0.06)
Bending Moment (in-plane)	0.0653	(1.00)	0.0252	(0.39)	0.0094	(0.14)
Twisting Moment	0.0218	(1.00)	0.0064	(0.29)	0.0032	(0.15)

Table 4-4 各モーメント成分の歪エネルギー (z座標スケーリング)

Strain Energy	Initial Shape		Final Shape (z-free)		Final Shape (xyz-free)	
	(J)	ratio	(J)	ratio	(J)	ratio
Bending Moment (out-of-plane)	3.310	(1.00)	0.085	(0.03)	0.025	(0.01)
Bending Moment (in-plane)	0.155	(1.00)	0.010	(0.07)	0.003	(0.02)
Twisting Moment	0.149	(1.00)	0.005	(0.03)	0.003	(0.02)

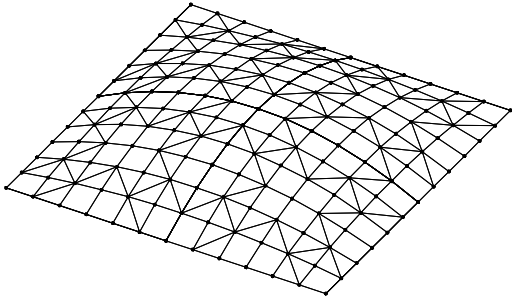


Fig. 4-20-a Model B : 初期形状

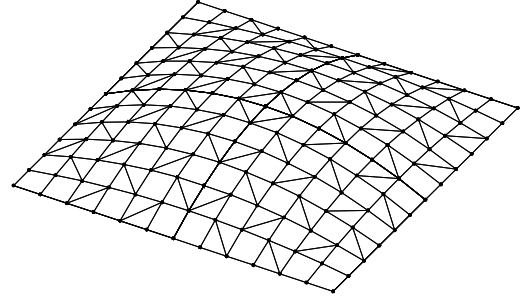


Fig. 4-21-a Model C : 初期形状

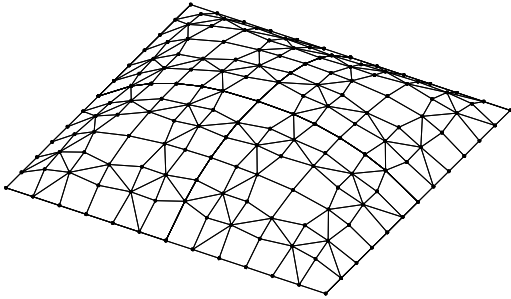


Fig. 4-20-b Model B : 最終形状

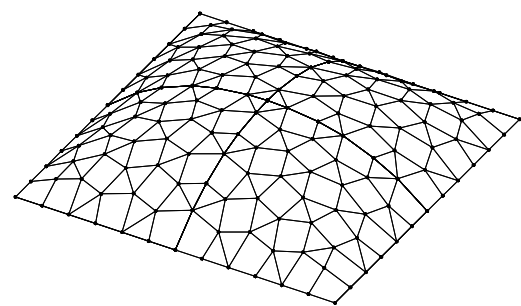


Fig. 4-21-b Model C : 最終形状

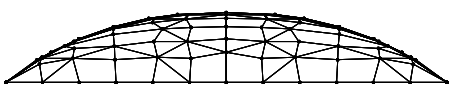


Fig. 4-22 Model B : 最終形状

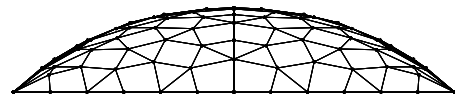
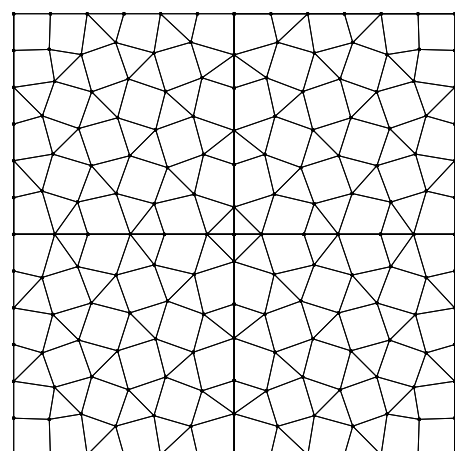
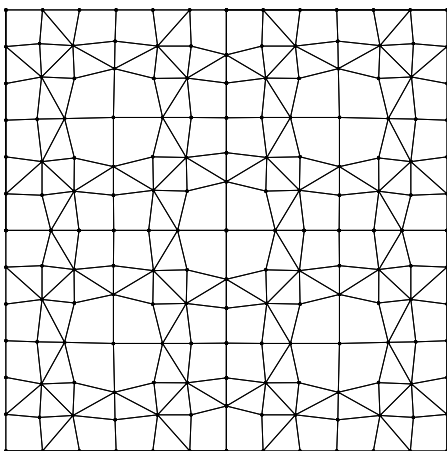


Fig. 4-23 Model C : 最終形状



メント、振りモーメントの分布図 (Fig.4-18,19) から同様の傾向が確認できる。

モーメントの値をより詳細に検討するために、初期形状、z方向自由による最終形状、及びxyz方向自由による最終形状の3つの形状における、各モーメント成分の最大値をTable4-1に、また、各モーメント成分により生ずる歪エネルギーの値をTable4-2に示す。z方向自由とした最終形状の面外方向の曲げモーメントの最大値は、初期形状のおよそ1/4に、歪エネルギーでは3%に減少している。一方、xyz方向自由とした場合では初期形状の2%、歪エネルギーで1%未満と曲げモーメントを大きく低減している。

xyz方向自由とした最終形状のライズは5.50mであり、初期形状の4mに比べて約1.38倍と大きく上昇している。ライズが高いほど境界でのスラストが小さくなり、部材に発生する軸力は小さくなる(Fig.4-16)。この要因によって、曲げモーメントが小さくなる効果も大きいと考えられる。この為、各最終形状のz座標に対してスケーリングを行い、初期形状と同じ4mとした場合の各形状に対して改めて断面力を算定した。これらスケーリングされた形状の各モーメントの最大値及び歪エネルギーの値をTable 4-3, Table 4-4にそれぞれ示す。この場合においても、xyz方向自由により得られた形状の各モーメント

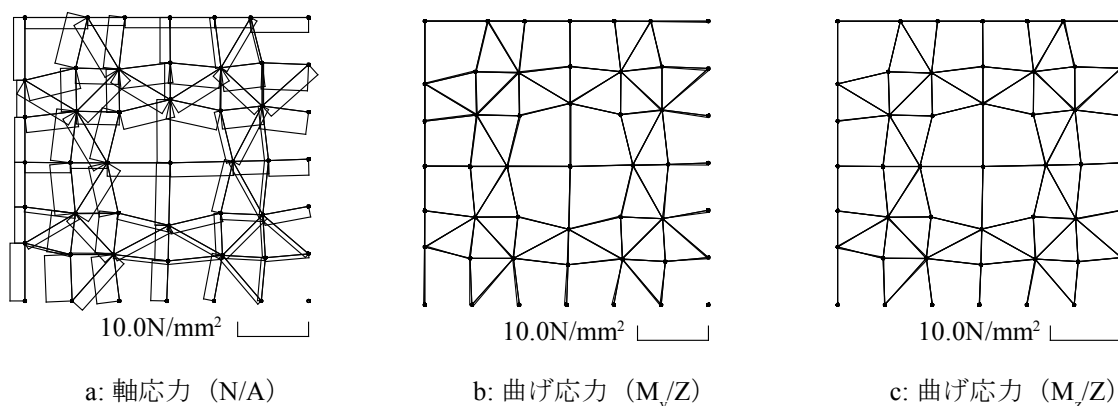


Fig. 4-24 応力図 : Model B : 最終形状

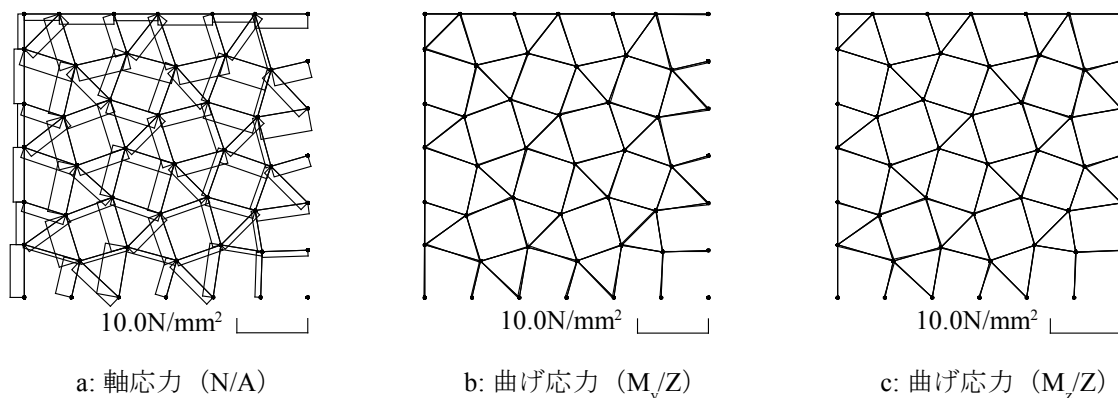


Fig. 4-25 応力図 : Model C : 最終形状

の最大値及び歪エネルギーの値は、z方向自由の結果に比べていずれも小さくなっており、曲面の分割パターンが曲げモーメントの分布に大きな影響を与えていることが確認できる。

次に、Model B及びModel Cに対し、xyz方向自由とした場合の最終形状をFig.4-20-b及びFig. 4-21-bにそれぞれ示す。また、各モデルの初期形状をFig.4-20-a, Fig.4-20-aに示す。これら初期形状に与えられた位相では、支持点を結ぶ滑らかな曲線によって曲面を表現することが不可能であるため、最終形状では、部材の配置が幾何学的な網目模様を描き、軸力の流れの複雑な形態を示している。これら最終形状の断面力によって生ずる軸応力と曲げによる縁応力の分布を、Model Bの最終形状はFig.4-24に、Model Cの最終形状はFig.4-25にそれぞれ示す。両モデルとも、曲げによる縁応力は軸応力に比べ、非常に小さくなっており、曲げモーメントを殆ど生じていないことが確認できる。

4.6 4章のまとめ

自重に対し曲げモーメント分布の発生を極力抑えたスペースフレームの形状決定問題を扱った。得られた主要な結果は次のようにまとめられる。

- 1) 曲げモーメントの発生を抑えたスペースフレームの曲面形状を求める方法として、感度解析手法に基づく最適化手法が適用できる。
- 2) 連続体シェルの場合と同様、幾何学的に与えられた曲面形状からの比較的小さな形状修正によって、スペースフレームに発生する境界付近の曲げモーメントの集中を小さく抑えることができる。
- 3) スペースフレームのような離散的曲面構造においては、曲面形状以外に、曲面の分割パターンも曲げモーメントの分布に大きく寄与する。

5. まとめ

第 I 部では、外力に対し曲げモーメントの発生を極力抑えた曲面形状を求める方法として、曲面形状を未知関数とし、曲面の表面積を一定とする条件のもとで、曲げモーメントの分布を最小二乗法により直接的に最小化する方法を提案した。曲面を有限要素法により離散化し、節点座標を設計変数とする最適化問題として扱った。有限要素法のマトリクス表記による統括的な最適化問題の設定を行い、曲げモーメント分布の節点座標に対する感度を定式化した。最適化手法には非線形計画法である逐次二次計画法を採用した。

具体的な適用例として、軸対称シェル要素、三角形平面シェル要素、直線材要素を用いた場合の定式化を示し、軸対称シェル、自由曲面シェル、スペースフレームの数値解析例を示した。これらの数値解析を通して提案手法の有効性を確認した。また、最適化によって得られた最終形状の力学性状について調査を行い、この種の曲面の力学的性質として、以下のような知見を得た。

- 1) 曲面構造の境界付近に発生する局所的な曲げモーメントの分布は、形状の比較的小さな差異によって大きく変化する。(2章)
- 2) 自重に対して曲げモーメントを発生しない形状は、唯一ひとつでなく、膜力の立体的な流れに応じた様々な形状が存在する場合がある。(3章)
- 3) スペースフレームのような離散的な曲面構造では、曲面形状以外に、曲面の分割パターンも曲げモーメントの分布に大きく寄与する。(4章)

1)の結果は特に重要であると考えられる。これは、設計時に算定された応力が、実際の構造物では大きく異なった応力を示す危険性を意味する。また、シェルの形状決定をする上では、外力分布、材料特性、支持条件のモデル化の違いによる応力の変化のオーダーを詳細に調査し、曲面形状が現実的にどの位の精度で決定可能であるかを見極める必要がある。例えば、一般に良く用いられる球形ドームは既に解近傍にあり、また精緻なモデル化をしない限り、応答計算と実際の構造物の挙動には少なくともいずれがあると考えられる為、論文中で得られたドームの最適形状を実際の構造物へ適用することの意味は少ないと言えるだろう。複雑な境界を持ち、適切な曲面形状を予測することが困難な場合において、特に本論文で示したような形状決定が有効になる。

論文中では、主に自重に対して形状決定を行ったが、実際の構造物は、積雪、風、地震力といった様々な外力を受ける。この為、特定の外力に対して曲げの発生を抑えた曲面を採用することの意味は

少ないかもしれない。しかし、2)に述べている事実は、自重に対し曲げを発生させずに、更に他の外力に対しても抵抗性の高いものを選択するだけの自由度を持つ場合があることを意味する。また、大スパン構造は自重による初期応力が構造材料の弾性範囲の多くの部分を占める傾向にある。この為、自重に対して形状決定することで、初期応力の偏在を無くし、短期外力に対する余裕度を効率よく与えることができるものとする。ここで扱った形状決定が、実際の設計計画上どの程度の効果を生み出すかは、より設計実務に沿った検討が必要である。

3)に関しては、スペースフレームでは軸力の流れが滑らかな分割パターンを採用することが重要と考えられるが、4.5節で示したような複雑な曲面分割も可能である。

第Ⅱ部

座屈荷重を目的関数とする曲面構造の形状最適化

曲面構造は分布外力に対し主に面内の圧縮力によって抵抗し、一般に面内に比して面外方向の剛性が極端に小さい為に、座屈を発生しやすい。座屈は系の釣り合い状態に大きな変化を与え、構造物の崩壊の主要な要因となる。第Ⅱ部では、最適化手法を用いて座屈荷重が最大となる曲面形状を求め、その力学性状について調査することを目的とする。

第1章は、特定のモードの非線形座屈荷重を最大化する問題が扱われる。解析対象は左右対称な分布荷重を受ける左右対称なアーチとし、対称分岐型の座屈荷重が最大化される。第2章は複数のモードの非線形座屈荷重を同時に最大化する問題が扱われる。解析対象モデルは格子シェルであり、極限点型と3つの分岐点型座屈荷重が同時に最大となる形状が求められる。第3章は、構造物の対称性を利用して重複固有値の感度を評価する方法が提案され、この方法を用いたトラスドームの形状最適化問題が扱われる。

1. 単純臨界型の座屈荷重を有するアーチの形状最適化

1.1 はじめに

外力に対し主に圧縮力によって抵抗するシェルやラチスドームなどの曲面構造においては、変位や荷重がある大きさに達すると、それまでとは全く別の平衡状態に移行し、座屈と呼ばれる不安定現象を起こす場合がある。この座屈現象は、構造材料の強度を十分発揮することなく構造物を崩壊に至らしめることもある為、安全性を検討する上で重要である。

本章では、空間構造の弾性座屈荷重に対する形状依存性を把握することを主要な目的とし、その基礎的な課題として座屈荷重を目的関数としたアーチの形状最適化問題を扱い、アーチの座屈と形状の関係について詳細な調査を行う。

アーチの座屈最適化問題を扱った既往の研究では部材断面を最適化したものが多い。C. H. Wu¹⁾、B. Budiansky et al²⁾は、静水圧荷重を受ける円弧アーチの古典座屈荷重が最大となる部材断面の分布を求めている。J. C. Amazigo³⁾も同様に静水圧荷重を受ける円弧アーチを扱っているが、非線形座屈荷重を扱っており、極限点型座屈荷重が最大となる部材断面の分布を求めている。I. G. Tadjbakhsh⁴⁾は分布荷重に対し曲げモーメントの生じないアーチ形状を求め、この種のアーチの座屈荷重を求めている。アーチの形状を最適化したものは数が少なく、R. H. plaut⁷⁾らの研究に見られる程度である。そこでは、アーチの長さを一定とする条件のもとで、非線形座屈荷重を最大とするアーチ形状を求めている。ただし、その定式は扁平理論に基づいている。

外力分布及びアーチ形状が左右対称性を有するアーチの座屈では、一般にアーチが扁平である場合は極限点型の座屈を示し、ある程度のライズを有すると対称分岐型の座屈を示す。極限点型の座屈が先行するような極端に扁平なアーチが建築構造物に適用される事例は少ないと考えられるため、本章では特に最小座屈が対称分岐点となる場合について座屈荷重を最大とするアーチ形状を求める。

1.2 最適化問題の定式化

1.2.1 目的関数及び制約条件

構造材の体積が一定の条件のもとで、座屈荷重が最大となるアーチ形状を求めるものとする。幾何学的非線形解析には有限要素法を使用し、直線材要素を用いてアーチを離散化する。要素数を M 、節点数を $N (= M + 1)$ と表す。アーチ両端の支持点となる節点を除いた節点数を $N_r (= M - 1)$ とし、これらの節点位置ベクトルを $\mathbf{r}_i = [r_{xi} \ r_{yi}]^T$ と表す。アーチの任意の形状は節点位置ベクトル

$\mathbf{r} = [\mathbf{r}_1^T, \dots, \mathbf{r}_M^T]^T$ によって表現される。問題は座屈荷重を最大とする節点位置ベクトル \mathbf{r} を求める問題として扱われる。また、アーチ形状が座屈荷重に及ぼす影響について着目している為、ここではアーチの断面は単純に一様とする。この場合、構造材の体積を一定とする制約条件は、要素長の総和が一定という条件に置き換えられる。従って、問題を次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \text{Objective Function} \quad & f(\mathbf{r}) = -\Lambda^C(\mathbf{r}) \quad \rightarrow \text{Minimize} \\ \text{Subject to} \quad & c(\mathbf{r}) = \sum_{e=1}^M l_e - L_0 = 0 \end{aligned} \quad (1-1)$$

ここに、 Λ^C は座屈荷重係数、 l_e は1要素の長さ、 L_0 は指定したアーチ長である。

部材の材料非線形性は考慮せず、弾性座屈を扱うものとする。すなわち、応力に関する制約などは考慮せず、線形弾性体と仮定した構造物において座屈荷重の大きな形状を求めることを目的とする。問題は制約つき非線形最適化問題となる。第 I 部と同様に、最適化手法には逐次二次計画法を採用する。

問題(1-1)式のLagrange関数を次式のように定義する。

$$L(\mathbf{r}, \mu) = f(\mathbf{r}) + \mu c(\mathbf{r}) = -\Lambda^C + \mu \left(\sum_{e=1}^M l_e - L_0 \right) \quad (1-2)$$

ここに、 μ はラグランジュ乗数を表す。

上式を \mathbf{r}, μ で偏微分することで、最適性必要条件は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mu)}{\partial r_{\alpha i}} &= -\frac{\partial \Lambda^C}{\partial r_{\alpha i}} + \mu \sum_{e=1}^M \frac{\partial l_e}{\partial r_{\alpha i}} = 0 \\ \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mu)}{\partial \mu} &= \sum_{e=1}^M l_e - L_0 \end{aligned} \quad (1-3)$$

本問題は上式を満たす \mathbf{r} 及び μ を求める問題として扱われる。座屈荷重係数 Λ^C とその感度係数 $\partial \Lambda^C / \partial r_{\alpha i}$ を評価するには、釣合経路上の臨界点を求める必要がある。従って、最適化における反復毎に、増分解析により非線形方程式を解くことになる。また、座屈荷重係数の感度係数 $\partial \Lambda^C / \partial r_{\alpha i}$ は、極限点、対称分岐点、非対称分岐点といった臨界点の性質によって評価方法が異なることが知られている¹⁰⁾。以降ではまず、幾何学的非線形性を考慮した直線材要素の定式化を示し、後に臨界点の判別法と、臨界点が極限点及び対称分岐点となる場合の感度係数 $\partial \Lambda^C / \partial r_{\alpha i}$ の評価方法について述べる。

1.2.2 平面直線材要素による幾何学的非線形解析^{8),9)}

直線材要素による幾何学的非線形解析の定式を示す。幾何学的非線形問題でよく用いられる Total Lagrange 法による定式では、初期状態からの変位をもとに定式化するため、ひずみに高次の非線形項まで考慮しなければ、変位が大きくなるにつれて一般に解の精度が落ちる。ここで採用する方法では、部材の変形に追従する移動座標系を設定し、ひずみに剛体変位の影響が含まれないようにする。これにより、比較的大きな変位に対しても、少ない要素数で精度の良い解が求められる。このような手法を採用した理由は、1)最適化過程においていびつな形状が発生した場合においても精度良く座屈荷重を評価できる、2)比較的少ない要素分割でアーチの座屈荷重を評価できるため、設計変数である節点座標を減らすことができ、計算時間の短縮や収束性の向上が得られる、などの理由による。

1.2.2.1 移動座標系

初期状態からの外力及び変形の状態は、1つのパラメータ t で表現可能であるとする。Fig. 1-1 に示すように、部材 ij が外力を受け、 $t = t^*$ において $i'j'$ に変形したものとする。図中の座標系 $o - \bar{x}\bar{y}$ は全体座標系を表す。 $o - xy$ は部材に設定した局所座標系であり、 $o - x^{(0)}y^{(0)}$ は変形前の状態における座標系、 $o - x^{(t^*)}y^{(t^*)}$ は変形後の状態に対して設定した座標系である。座標系 $o - x^{(0)}y^{(0)}$ で測った要素節点変位ベクトルを \mathbf{d} 、座標系 $o - x^{(t^*)}y^{(t^*)}$ で測った要素節点変位ベクトルを \mathbf{d}_e として、次式で定義する。

$$\mathbf{d} = [u_i \quad v_i \quad \theta_i \quad u_j \quad v_j \quad \theta_j]^T, \quad \mathbf{d}_e = [u_e \quad \theta_{ei} \quad \theta_{ej}]^T \quad (1-4)$$

幾何学的な関係から、これら2つの変位ベクトルには次の関係が成り立つ。

$$u_e = \sqrt{(u_j - u_i + l_e)^2 + (v_j - v_i)^2}, \quad \theta_{ei} = \theta_i - R, \quad \theta_{ej} = \theta_j - R, \quad R = \tan^{-1} \left(\frac{v_j - v_i}{u_j - u_i + l_e} \right) \quad (1-5)$$

上式は、パラメータ t によって変化する移動座標系における要素節点変位の座標変換を表す。上式を t で微分すると次式が得られる。

$$\begin{Bmatrix} \dot{u}_e \\ \dot{\theta}_{ei} \\ \dot{\theta}_{ej} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos R & -\sin R & 0 & \cos R & \sin R & 0 \\ -\sin R & \cos R & 1 & \frac{\sin R}{l_e + u_e} & \frac{-\cos R}{l_e + u_e} & 0 \\ \frac{l_e + u_e}{l_e + u_e} & \frac{\cos R}{l_e + u_e} & 0 & \frac{\sin R}{l_e + u_e} & \frac{-\cos R}{l_e + u_e} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{\theta}_i \\ \dot{u}_j \\ \dot{v}_j \\ \dot{\theta}_j \end{Bmatrix} \quad (1-6)$$

或いは、

$$\dot{\mathbf{d}}_e = \mathbf{T} \dot{\mathbf{d}}$$

ここに、 $(\dot{\quad})$ は t による微分を意味する。上式は節点変位増分ベクトルの座標変換を表す。

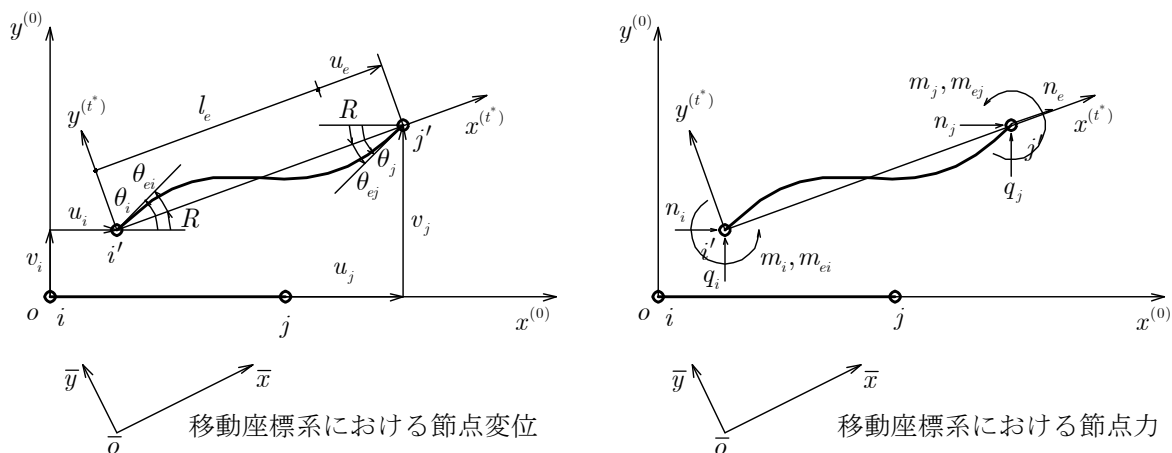


Fig. 1-1 移動座標系における節点変位

次に節点力の移動座標系への変換を定義する。Fig. 1-1 に示すように座標系 $o-x^{(0)}y^{(0)}$ で測った節点力ベクトルを \mathbf{f} 、座標系 $o-x^{(t)}y^{(t)}$ で測った節点力ベクトルを \mathbf{f}_e として、次式で定義する。

$$\mathbf{f} = [N_i \quad Q_i \quad M_i \quad N_j \quad Q_j \quad M_j]^T, \mathbf{f}_e = [N_e \quad M_{ei} \quad M_{ej}]^T \quad (1-7)$$

(1-6)式の反傾関係から、次式が成立する。

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}_e^T \mathbf{f}_e \quad (1-8)$$

上式は、節点力ベクトルの座標変換式を表す。上式を t で微分すると次式が得られる。

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{T}_e^T \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\mathbf{T}}_e^T \mathbf{f}_e \quad (1-9)$$

1.2.2.2 釣合方程式

材軸上の任意位置における変位は、移動座標系による要素節点変位を用いて軸方向一次、法線方向三次の多項式によって近似し、次式で表す。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & 0 & 0 \\ 0 & l(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi) & l(\xi^3 - \xi^2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_e \\ \theta_{ei} \\ \theta_{ej} \end{Bmatrix} \quad (1-10)$$

ここに、 $\xi = x/l_e$ である。

要素内任意点における軸方向ひずみ ε は次式により仮定する。

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon_0(x) + y\kappa(x), \quad \varepsilon_0 = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{dv}{dx} \right)^2, \quad \kappa = -\frac{d^2v}{dx^2} \quad (1-11)$$

仮想ひずみは、(1-11)式より次式によって表される。

$$\delta\varepsilon_0 = \frac{du}{dx} + \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} + \frac{dv}{dx} \frac{d\delta v}{dx}, \quad \delta\kappa = -\frac{d^2\delta v}{dx^2} \quad (1-12)$$

部材の断面力とひずみの関係は、次式で表される。

$$N = EA\varepsilon_0, \quad M = EI\kappa \quad (1-13)$$

仮想仕事の原理により次式が成立する。

$$\int_0^l N\delta\varepsilon_0 dx + \int_0^l M\delta\kappa dx - N_e\delta u_e - M_{e_i}\delta\theta_{e_i} - M_{e_j}\delta\theta_{e_j} = 0 \quad (1-14)$$

(1-10)~(1-13)式を上式に代入し、 $\delta\mathbf{d}_e$ が任意であることを考慮すると、次式のような移動座標系における非線形釣合方程式が得られる。

$$\mathbf{k}_{eS}(\mathbf{d}_e)\mathbf{d}_e - \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \quad (1-15)$$

$$\mathbf{k}_{eS} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_e} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) \left(1 + \frac{u_e}{2l_e}\right) & \frac{EA}{60} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) (4\theta_{e_i} - \theta_{e_j}) & \frac{EA}{60} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) (-\theta_{e_i} + 4\theta_{e_j}) \\ \frac{4EI}{l_e} + \frac{EA}{15} u_e + \frac{EAl_e}{420} (12\theta_{e_i}^2 - 3\theta_{e_i}\theta_{e_j} + \theta_{e_j}^2) & \frac{2EI}{l_e} - \frac{EA}{60} u_e + \frac{EAl_e}{840} (-3\theta_{e_i}^2 + 4\theta_{e_i}\theta_{e_j} - 3\theta_{e_j}^2) \\ \text{sym} & \frac{4EI}{l_e} + \frac{EA}{15} u_e + \frac{EAl_e}{420} (\theta_{e_i}^2 - 3\theta_{e_i}\theta_{e_j} + 12\theta_{e_j}^2) \end{bmatrix}$$

上式を t で微分することで、増分型の釣合方程式として次式が得られる。

$$\mathbf{k}_{eT}\dot{\mathbf{d}}_e - \dot{\mathbf{f}}_e = \mathbf{0}, \quad \mathbf{k}_{eT} = \mathbf{k}_{eA} + \mathbf{k}_{eG} \quad (1-16)$$

$$\mathbf{k}_{eA} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_e} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right)^2 & \frac{EA}{30} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) (4\theta_{e_i} - \theta_{e_j}) & \frac{EA}{30} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) (-\theta_{e_i} + 4\theta_{e_j}) \\ \frac{4EI}{l_e} + \frac{EAl_e}{210} (12\theta_{e_i}^2 - 3\theta_{e_i}\theta_{e_j} + \theta_{e_j}^2) & \frac{2EI}{l_e} + \frac{EAl_e}{420} (-3\theta_{e_i}^2 + 4\theta_{e_i}\theta_{e_j} - 3\theta_{e_j}^2) \\ \text{sym} & \frac{4EI}{l_e} + \frac{EAl_e}{210} (\theta_{e_i}^2 - 3\theta_{e_i}\theta_{e_j} + 12\theta_{e_j}^2) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{k}_{eG} = \frac{N_e}{1 + \frac{u_e}{l_e}} \begin{bmatrix} \frac{1}{l_e} & 0 & 0 \\ \frac{2l_e}{15} & -\frac{l_e}{30} \\ \text{sym} & \frac{2l_e}{15} \end{bmatrix}$$

ここに、 \mathbf{k}_{eT} , \mathbf{k}_{eA} , \mathbf{k}_{eG} はそれぞれ移動座標系における、接線剛性行列、線形剛性行列+大変位行列、幾何剛性行列を表す。

1.2.2.3 移動座標系から全体座標系への変換

(1-5)式で表した移動座標系への変換式を次式のように表す。

$$\mathbf{d}_e = \mathbf{H}(\mathbf{d}) \quad (1-17)$$

\mathbf{d} は変形前の局所座標系から測った変位であり、空間に固定された座標系で表されている。(1-8)式により、変形前の局所座標系で表現された釣合方程式は次式で表される。

$$\mathbf{q} - \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (1-18)$$

ここに、 $\mathbf{f} = \mathbf{T}_e^T \mathbf{f}_e$, $\mathbf{q} = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_{eS} \mathbf{H}(\mathbf{d})$

上式をさらに全体座標系に変換するには、有限要素法で通常行われる座標変換を行えばよい。即ち、

$$\bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{0} \quad (1-19)$$

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}, \quad \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{T}^T \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_{es} \mathbf{H}(\mathbf{d}) = \mathbf{T}^T \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_{es} \mathbf{H}(\mathbf{T}\bar{\mathbf{d}})$$

ここに、 $\bar{(\)}$ は全体座標系で表現されていることを意味し、 \mathbf{T} は座標変換マトリクスを表す。

次に増分型の釣合方程式の変換を示す。(1-9)式に(1-16),(1-6)式を代入すると、次式が得られる。

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_{eT} \mathbf{T}_e \dot{\mathbf{d}} + \dot{\mathbf{T}}_e^T \mathbf{f}_e \quad (1-20)$$

ここで、上式の第2項を次のように整理して表す。

$$\dot{\mathbf{T}}_e^T \mathbf{f}_e = \mathbf{k}_{G2} \dot{\mathbf{d}} \quad (1-21)$$

$$\mathbf{k}_{G2} = \begin{bmatrix} a & b & 0 & -a & -b & 0 \\ & c & 0 & -b & -c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & a & b & 0 \\ sym & & & & c & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} a &= \frac{1}{l_e + u_e} \{N_e \sin^2 R - 2Q_e \sin R \cos R\} \\ b &= \frac{-1}{l_e + u_e} \{N_e \sin R \cos R + Q_e (\sin^2 R - \cos^2 R)\} \\ c &= \frac{1}{l_e + u_e} \{N_e \cos^2 R + 2Q_e \sin R \cos R\} \\ Q_e &= \frac{M_{ei} + M_{ej}}{l_e + u_e} \end{aligned}$$

従って、空間に固定された局所座標系における増分型の釣合方程式は次式となる。

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{k}_T \dot{\mathbf{d}}, \quad \mathbf{k}_T = \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_{eT} \mathbf{T}_e + \mathbf{k}_{G2} \quad (1-22)$$

上式をさらに全体座標系に変換するには、次式のように有限要素法で通常行われる座標変換を行えばよい。

$$\dot{\bar{\mathbf{f}}} = \bar{\mathbf{k}}_T \dot{\bar{\mathbf{d}}}, \quad \bar{\mathbf{k}}_T = \mathbf{T}^T \mathbf{k}_T \mathbf{T} \quad (1-23)$$

最終的に、(1-19)式、及び(1-23)式を要素全てに対して重ね合わせを行うことで、系全体の釣合方程式及び増分型の釣合方程式が得られる。ただし本論文では、荷重モードを一定とした比例載荷荷重のみを扱うので、荷重パラメータ Λ を導入し、次式のように表現する。

$$\bar{\mathbf{Q}} - \Lambda \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad (1-24)$$

$$\bar{\mathbf{K}}_T \bar{\mathbf{D}} - \dot{\Lambda} \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad (1-25)$$

ここで、重ね合わせによって系全体で表現されたマトリクスやベクトルを大文字で表している。座屈荷重係数 Λ^c は、(1-24)式の釣合方程式を満たし、接線剛性 $\bar{\mathbf{K}}_T$ の固有値が零となる時の荷重係数である。本論文では、接線剛性 $\bar{\mathbf{K}}_T$ の固有値を調査しながら弧長増分法¹²⁾による釣合経路解析を行い、最小固有値の符号が負に転じた時点で、二分点法により $\bar{\mathbf{K}}_T$ の固有値が零となる点を求めている。

1.2.2.4 線形座屈解析

線形座屈荷重係数を求める方法を示す。

外力モード $\bar{\mathbf{F}}$ に対し、次式による線形弾性解析を行う。

$$\bar{\mathbf{K}}_L \bar{\mathbf{D}} - \bar{\mathbf{F}} = \mathbf{0} \quad (1-26)$$

ここに $\bar{\mathbf{K}}_L$ は線形剛性行列を表しており、接線剛性行列 $\bar{\mathbf{K}}_T$ の変位を零と置いた時の行列である（陽に表現した場合、通常の微小変形理論による剛性行列と一致する）。上式を解いて得られた変位ベクトル $\bar{\mathbf{D}}$ を用いて、線形弾性時の部材の内力（材端力）ベクトル \mathbf{q} を求める。

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}_L \mathbf{d} \quad (1-27)$$

ここで、 \mathbf{k}_L は要素の線形剛性マトリクスである。

接線剛性行列 \mathbf{k}_T の幾何剛性項 \mathbf{k}_G は、内力ベクトルを独立変数として表現すれば、(1-16),(1-21)式より次式のように表せる。

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_G(\mathbf{d}, \mathbf{q}) &= \mathbf{T}_e(\mathbf{d})^T \mathbf{k}_{eG}(\mathbf{d}_e, \mathbf{q}_e) \mathbf{T}_e(\mathbf{d}) + \mathbf{k}_{G2}(\mathbf{d}_e, \mathbf{q}_e) \\ &= \mathbf{T}_e(\mathbf{d})^T \mathbf{k}_{eG}(\mathbf{H}(\mathbf{d}), \mathbf{T}_e(\mathbf{d})^T \mathbf{q}) \mathbf{T}_e(\mathbf{d}) + \mathbf{k}_{G2}(\mathbf{H}(\mathbf{d}), \mathbf{T}_e(\mathbf{d})^T \mathbf{q}) \end{aligned} \quad (1-28)$$

上式に、 $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ 及び(1-27)式で得られた \mathbf{q} を代入し、全体座標系において重ね合わせを行うことで、変位を無視した幾何剛性マトリクス $\bar{\mathbf{K}}_G$ を得る。線形座屈荷重係数は、次の固有値解析により評価される。

$$[\bar{\mathbf{K}}_L + \Lambda_i^{\text{lin}C} \bar{\mathbf{K}}_G] \phi_i^{\text{lin}} = \mathbf{0} \quad (1-29)$$

ここに、 $\Lambda_i^{\text{lin}C}$, ϕ_i^{lin} は線形座屈荷重係数、線形座屈モードを表す。

1.2.3 臨界点の分類と座屈荷重係数感度^{9), 10), 11)}

1.2.3.1 臨界点の分類

本章で扱う臨界点は、唯一ひとつの変位モード方向に臨界となる単純臨界点を扱い、複数の方向に同時に臨界となるような重複臨界点の場合については考慮しない。

任意の釣合点における釣合方程式及び増分型の釣合方程式を次式で表す。

$$\mathbf{Q}(\mathbf{D}) - \Lambda \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (1-30)$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{D}) \dot{\mathbf{D}} - \dot{\Lambda} \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (1-31)$$

\mathbf{Q} は内力ベクトル、 \mathbf{F} は外力モード、 \mathbf{D} は変位ベクトル、 Λ は荷重係数、 (\cdot) は釣合経路上の位置を表すパラメータ t による微分を意味する。 \mathbf{K}_T は接線剛性行列を表す。上式では全体座標系を表す $(\bar{\cdot})$ は省略している。臨界点は(1-30)式の釣合式を満たし、(1-31)式の接線剛性行列 \mathbf{K}_T の固有値が零となる釣合点である。

\mathbf{K}_T の固有値を λ_i 、正規化された固有モードを ϕ_i とすると、次式が成り立つ。

$$\mathbf{K}_T \phi_i = \lambda_i \phi_i, \quad \phi_i^T \phi_i = 1 \quad (1-32)$$

モーダル行列 $\Phi = [\phi_1 \ \phi_2 \ \cdots \ \phi_N]$ を用いて、変位増分ベクトル、荷重モードを次式のように変換する。

$$\dot{\mathbf{D}} = \Phi \dot{\mathbf{U}}, \quad \mathbf{F} = \Phi \mathbf{G} \quad (1-33)$$

上式を(1-31)式に代入し、左から Φ^{-1} ($= \Phi^T$) を乗じると次式を得る。

$$\Phi^T \mathbf{K}_T \Phi \dot{\mathbf{U}} - \dot{\Lambda} \mathbf{G} = \mathbf{0} \quad (1-34)$$

ここで、

$$\Phi^T \mathbf{K}_T \Phi = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & \mathbf{0} \\ & \ddots & \\ \mathbf{0} & & \lambda_N \end{bmatrix} \quad (1-35)$$

であるので、増分形の釣合式は次式で表すことが出来る。

$$\lambda_i \dot{u}_i - \dot{\Lambda} g_i = 0 \quad (1-36)$$

ここで \dot{u}_i は $\dot{\mathbf{U}}$ の i 番目の成分、 g_i は \mathbf{G} の i 番目の成分である。便宜上、 \mathbf{K}_T の固有値 λ_i ($i = 1, \dots, N$) の1番目の固有値が零となるものとし、 $\lambda_1 = 0$ と仮定する。この時、上式の釣合を満たすためには次式が成立する。

$$\dot{\Lambda} g_1 = \dot{\Lambda} \phi_1^T \mathbf{F} = 0 \quad (i = 1, \dots, N) \quad (1-37)$$

上式を利用して、臨界点は次のように分類される。

$$\begin{array}{lll} \dot{\Lambda} = 0, \phi_1^T \mathbf{F} \neq 0 & \text{極限点} & (\text{荷重増分が零、座屈モードと外力モードが非直交}) \\ \dot{\Lambda} = 0, \phi_1^T \mathbf{F} = 0 & \text{対称分岐点} & (\text{荷重増分が零、座屈モードと外力モードが直交}) \\ \dot{\Lambda} \neq 0, \phi_1^T \mathbf{F} = 0 & \text{非対称分岐点} & (\text{荷重増分が非零、座屈モードと外力モードが直交}) \end{array}$$

上式に従って釣合経路上に最初に現れる臨界点の判別を行う。以降では、これら臨界点の性質に対応した座屈荷重係数の感度を示す。ただし、アーチの釣合経路に非対称分岐点が現れることは稀であるため、臨界点が極限点と対称分岐点となる場合について述べる。

1.2.3.2 極限点における座屈荷重係数感度

アーチが臨界状態 C にあるものとする。この時、次式が成り立つ。

$$\mathbf{Q}(\mathbf{D}^C) - \Lambda^C \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (1-38)$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{D}^C) \phi_1 = \mathbf{0} \quad (1-39)$$

$$\phi_1^T \phi_1 = 1 \quad (1-40)$$

ここに上添え字 C は臨界点 C での値であることを示す。また、以下の定式では特に断りのない限り \mathbf{Q} , \mathbf{K}_T は全て臨界点 C での値である。

節点位置ベクトル \mathbf{r} の成分 r_{ai} で(1-38)式を偏微分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial r_{ai}} + \mathbf{K}_T \frac{\partial \mathbf{D}^C}{\partial r_{ai}} - \frac{\partial \Lambda^C}{\partial r_{ai}} \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (1-41)$$

ただし、外力モード \mathbf{F} は r_{ai} に無関係としている。(1-41)式の左から ϕ_1^T を乗じ、 \mathbf{K}_T が対称行列であることを考慮すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial \Lambda^C}{\partial r_{ai}} = \phi_1^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial r_{ai}} / \phi_1^T \mathbf{F} \quad (1-42)$$

上式は、臨界点が極限点の場合における座屈荷重係数感度を表す。臨界点が分岐点となる場合では、

$\phi_1^T \mathbf{F} = 0$ であるために上式を用いて感度を評価することはできない。

1.2.3.3 対称分岐点における座屈荷重係数感度

以下では、臨界点が対称分岐点となる場合の座屈荷重係数感度について、問題の物理的な意味合いから簡易的に導出する。数学的に厳密な取り扱いについては文献11)を参照すること。

(1-41)式の左から ϕ_1^T を乗じると、次式が得られる。

$$\phi_1^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial r_{\alpha i}} + \phi_1^T \mathbf{K}_T \frac{\partial \mathbf{D}^C}{\partial r_{\alpha i}} - \frac{\partial \Lambda^C}{\partial r_{\alpha i}} \phi_1^T \mathbf{F} = 0 \quad (1-43)$$

上式左辺の第2項は、(1-39)式により零である。第1項 $\phi_1^T (\partial \mathbf{Q} / \partial r_{\alpha i})$ が零でない時、 $\phi_1^T \mathbf{F} = 0$ であるため、座屈荷重計数感度 $(\partial \Lambda^C / \partial r_{\alpha i})$ は無限大となり、別の定式化が必要となる。ここでは、上式の第1項が零となる、すなわち次式を満たす特別な場合を扱う。

$$\phi_1^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial r_{\alpha i}} = 0 \quad (1-44)$$

上式は、内力ベクトルの感度が座屈モードと直交することを意味する。本章では、対称平面アーチが対称荷重を受け、対称分岐座屈を生じる場合を扱う。さらに、アーチ形状は左右対称性を保持したまま、座屈荷重を最大とするアーチの形状最適化を行うものとする。アーチの分岐座屈モードは逆対称モードであり、またアーチ形状の対称性が保たれるように設計変数が設定されるため、内力ベクトルの感度は常に対称モードとなる。この為、これら2つのベクトルは互いに直交し、(1-44)式を満たすことになる。(このような形状の修正は、不整感度解析^{9),10)}の分野では *minor imperfection* と呼ばれている。逆に、(1-44)式を満たさない修正は、*major imperfection* と呼ばれ、対称分岐点は修正後では極限点に変化し、その荷重係数の感度は不整感度解析法で良く知られる 2/3 乗則として表される。)

(1-39),(1-40)式を $r_{\alpha i}$ で偏微分すると次式が得られる。

$$\left(\frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial r_{\alpha i}} + \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial D_j} \frac{\partial D_j^C}{\partial r_{\alpha i}} \right) \phi_1 + \mathbf{K}_T \frac{\partial \phi_1}{\partial r_{\alpha i}} = \mathbf{0} \quad (1-45)$$

$$\phi_1^T \frac{\partial \phi_1}{\partial r_{\alpha i}} = 0 \quad (1-46)$$

ここに、(1-45)式の表現には総和規約が適用されており、 D_j は変位ベクトル \mathbf{D} の第 j 成分を表す。

ここで、変位ベクトルの感度 $(\partial D_j^C / \partial r_{\alpha i})$ をモーダル行列 Φ を用いて次式のように座標変換する。

$$\frac{\partial \mathbf{D}^C}{\partial r_{\alpha i}} = \Phi \frac{\partial \mathbf{U}^C}{\partial r_{\alpha i}} \quad (1-47)$$

上式を(1-41)式に代入し、左から Φ^T を乗じると次式を得る。

$$\Phi^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial r_{\alpha i}} + \lambda \frac{\partial \mathbf{U}^C}{\partial r_{\alpha i}} - \frac{\partial \Lambda^C}{\partial r_{\alpha i}} \Phi^T \mathbf{F} = \mathbf{0}, \quad \lambda = \begin{bmatrix} 0 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_{N_d} \end{bmatrix} \quad (1-48)$$

上式の1番目の成分は、(1-43)式に対応し、全ての項において零であり何の情報も持たない。上式を $\partial \mathbf{U}^C / \partial r_{\alpha i}$ について解くことを考える。 $\partial \mathbf{U}^C / \partial r_{\alpha i}$ の第1成分 $\partial u_1^C / \partial r_{\alpha i}$ はこのままでは不定であるが、座屈前変形に座屈モード成分（逆対称成分）は含まないと考えられるので、 $\partial u_1^C / \partial r_{\alpha i} = 0$ と仮定する。よって、 $\partial \mathbf{U}^C / \partial r_{\alpha i}$ は次式により表すことができる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}^C}{\partial r_{\alpha i}} = \lambda^{-1} \left(-\Phi^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial r_{\alpha i}} + \frac{\partial \Lambda^C}{\partial r_{\alpha i}} \Phi^T \mathbf{F} \right), \quad \lambda^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & & & \mathbf{0} \\ & \lambda_2^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \lambda_{N_d}^{-1} \end{bmatrix} \quad (1-49)$$

これを(1-47)式に代入すると、変位ベクトルの感度は次式のように表すことができる。

$$\frac{\partial \mathbf{D}^C}{\partial r_{\alpha i}} = \frac{\partial \mathbf{D}_Q^C}{\partial r_{\alpha i}} + \frac{\partial \Lambda^C}{\partial r_{\alpha i}} \mathbf{D}_F^C \quad (1-50)$$

$$\text{ここに、} \quad \frac{\partial \mathbf{D}_Q^C}{\partial r_{\alpha i}} = -\Phi \lambda^{-1} \Phi^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial r_{\alpha i}}, \quad \mathbf{D}_F^C = \Phi \lambda^{-1} \Phi^T \mathbf{F} \quad (1-51)$$

上式を(1-45)式に代入し、右から ϕ_1^T を乗じて整理すると、次の対称分岐点における座屈荷重係数の感度式を得る。

$$\frac{\partial \Lambda^C}{\partial r_{\alpha i}} = -\phi_1^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial r_{\alpha i}} + \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial D_j} \frac{\partial D_{Q_i}^C}{\partial r_{\alpha i}} \right) \phi_1 / \phi_1^T \frac{\partial \mathbf{K}_T}{\partial D_j} D_{F_j} \phi_1 \quad (1-52)$$

ここに、 D_{Q_j}, D_{F_j} はそれぞれ $\mathbf{D}_Q, \mathbf{D}_F$ の第 j 成分を表す。

上式により、対称分岐点の感度を評価することができる。式中には、接線剛性行列の \mathbf{r} による微分及び変位による微分マトリクスを含む。これらの詳細については付録Dにまとめて示す。

1.2.4 解析手順

最適化の計算手順をまとめると、次のようになる。

Step 1 初期形状 $\mathbf{r}^{(0)}$ 、指定アーチ長さ L_0 、材料定数を与える（SQP法に利用されるパラメータの初期値は、 $\mu = 0.01, \mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{I}, \rho = 0.5$ とする）。

Step 2 弧長増分法による釣合経路解析を行い、釣合経路上の座屈点 $(\mathbf{D}^C, \Lambda^C)$ を求める。(1-2)式 Lagrange 関数 $L(\mathbf{r}^{(k)}, \mu^{(k)})$ を評価する。

Step 3 (1-52)式に従って感度解析を行い、(1-3)式で表される Lagrange 関数の勾配ベクトル $\nabla L(\mathbf{r}^{(k)}, \mu^{(k)})$ を評価する。この時、 $\|\nabla L(\mathbf{r}^{(k)}, \mu^{(k)})\| \approx 0$ であれば、求める解が得られているも

のとして終了する。

Step 4 部分2次計画問題(I-1-15)式を解き、 $(\Delta\mathbf{r}, \Delta\mu)$ を求める。

Step 5 $\mu^{(k+1)} = \mu^{(k)} + \Delta\mu$ とおき、(I-1-25)式に従って p を更新する。

Step 6 方向 $\Delta\mathbf{r}$ に対して直線探索を行い、(I-1-24)式を満たす t を求め、 $\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} + t\Delta\mathbf{r}$ とおく。

Step 7 (I-1-20)式に従って、 $\mathbf{B}^{(k)}$ を更新する。 $k = k + 1$ とおき直し、Step 2 に戻る。

1.3 数値解析

前節おける定式化に基づき、特定の対称荷重が作用する対称平面アーチの形状最適化を行う。ただし問題は、主経路上に最初に現れる臨界点が対称分岐点となる場合のみを扱うものとし、臨界点が極限点や非対称分岐点となるような問題はここでは扱わない。

1.3.1 等分布荷重を受けるアーチの解析

鉛直等分布荷重の作用する放物線アーチ (Fig.1-2) を初期形状として、形状最適化を行う。要素分割はスパン方向に等間隔となるように32分割し、設計変数は節点のy座標をとす。アーチ形状の対称性を考慮して設計変数のグルーピングを行い、16変数としている。スパンをS、初期形状のライズを H_0 とし、 $H_0/S=0.1, 0.2$ の2種類の初期形状を与え、制約条件であるアーチ長さは初期形状と同じ長さを指定する。アーチの断面は幅b、厚さhの矩形断面とし、 $h/S=0.01$ とする。外力は単位面積あたりの分布荷重をqとし、節点間に作用する分布荷重を集中荷重に換算し、1/2づつ節点に振り分けて与える。境界条件は、ピン支持及び固定支持とした場合についてそれぞれ解析を行う。

支持条件をピン支持、初期形状のスパンライズ比 $H_0/S=0.1$ とした場合に得られた形状をFig.1-3-aに示す。図はアーチの1/2の部分を表しており、記号■及び□は、それぞれ最終形状及び初期形状の節点座標を表している。初期形状及び最終形状におけるアーチの頂部節点の鉛直変位と荷重の関係(釣合曲線)を無次元化してFig.1-3-bに示す。実線は最終形状、破線は初期形状の釣合曲線を表している。また、比較のため、Dinnik¹⁴⁾により求められた放物線アーチの古典座屈荷重値を、水平の一点鎖線で同図中に示した。

同様に、ピン支持、 $H_0/S=0.2$ とした時の結果をFig.1-4-a,bに、固定支持、 $H_0/S=0.1$ とした時の結果をFig.1-5-a,bに、固定支持、 $H_0/S=0.2$ とした時の結果をFig.1-6-a,bに示す。図の記号と、各形状や釣合曲線との対応は先と同様である。また、各解析によって得られた最終形状の節点座標をTable 1-1に、座屈荷重をTable1-2にまとめて示す。

Fig.1-3-b~Fig.1-6-bの各解析結果の釣合曲線を見ると、水平の一点鎖線と初期形状の分岐点の縦

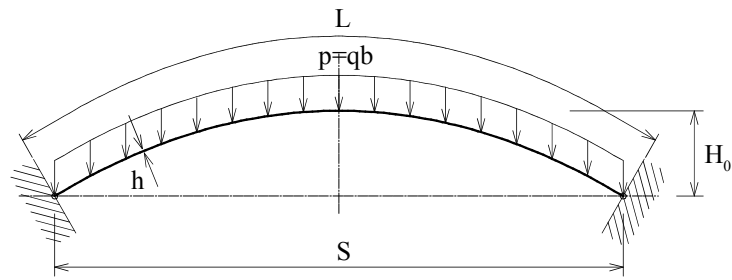


Fig. 1-2 解析モデル

軸の値はほぼ同じ値をとり、Dinnikによる解は、初期形状の幾何学的非線形解析による座屈荷重とよく一致している。また、全ての解析において、初期形状、最終形状ともに最小座屈は分岐座屈であることが確認できる。

Fig.1-3-a～1-6-aの各解析による最終形状を見ると、最適化により得られる形状は、境界条件によって大きく異なっていることがわかる。境界をピン支持とした場合には、初期形状である放物線と大きく変わらない形状が得られ (Fig.1-3-a, Fig.1-4-a)、境界を固定支持とした場合には、境界付近で曲率が逆符号となる形状が得られている (Fig.1-5-a, Fig.1-6-a)。また、ライズが高くなるにつれ、この曲率は大きくなることがわかる。境界ピン支持の場合、最終形状の座屈荷重は初期形状に比べ、 $H_0/S=0.1$ のとき1.004倍、 $H_0/S=0.2$ のとき1.003倍と、あまり変化していないのに対し、固定支持の場合では、最終形状の座屈荷重は初期形状に比べ、 $H_0/S=0.1$ のとき1.25倍、 $H_0/S=0.2$ のとき1.23倍であり、2割程度大きくなっている (Table 1-2)。放物線アーチは等分布荷重を受ける場合、微小変形域では曲げを生じないため、Fig.1-3-b～Fig.1-6-bの初期形状の釣合曲線は極限点に到るまで直線的である。一方、最終形状の釣合曲線はこれと比べると分岐点に到るまでに既に非線形性が見られ、初期形状に比べ臨界時の変位が大きいことが確認できる。

以上の結果から、軸力によって荷重を負担し曲げモーメントを発生しない形状と、座屈荷重の大きい形状が必ずしも同じ傾向にないことがわかる。

1.3.2 集中荷重を受けるアーチの解析

スパン中央に鉛直集中荷重を受けるアーチの分岐座屈荷重を最大とするアーチ形状を求める。初期形状は、この荷重に対して座屈前変形の極めて小さい山形フレーム (Fig.1-7) とする。要素分割は先の解析と同様、スパン方向に等間隔となるように32分割し、節点のy座標を設計変数とする。ただし、対称性を考慮し16変数とする。スパンライズ比が $H_0/S=0.1$, 0.2 の2種類の初期形状を与え、制約条件であるアーチ長さは初期形状と同じ長さをそれぞれ指定する。部材断面は幅b、厚さhの矩形断面とし、 $h/S=0.01$ とする。境界条件は、ピン支持及び固定支持とした場合についてそれぞれ解析を行う。

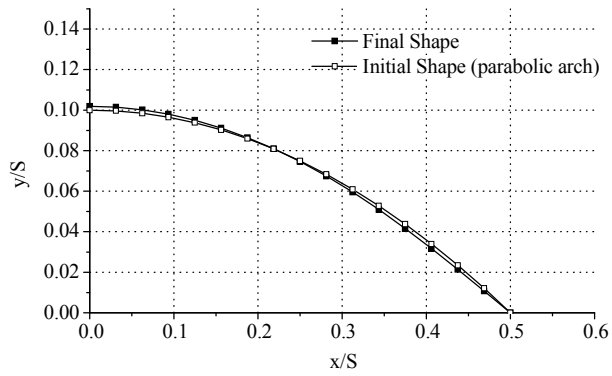


Fig. 1-3-a アーチ形状 (等分布荷重, ピン支持, $H_0/S=0.1$ ($L/S=1.0260$), $h/S=0.01$)

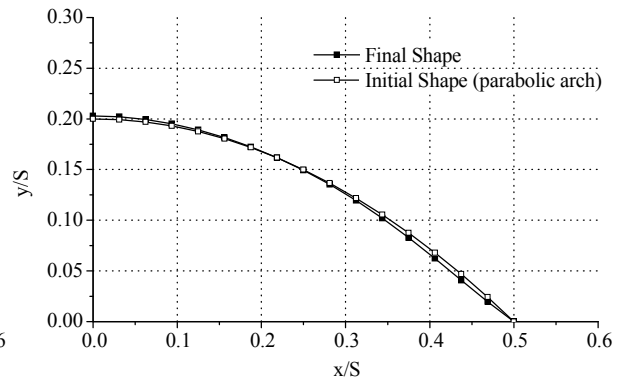


Fig. 1-4-a アーチ形状 (等分布荷重, ピン支持, $H_0/S=0.2$ ($L/S=1.0981$), $h/S=0.01$)

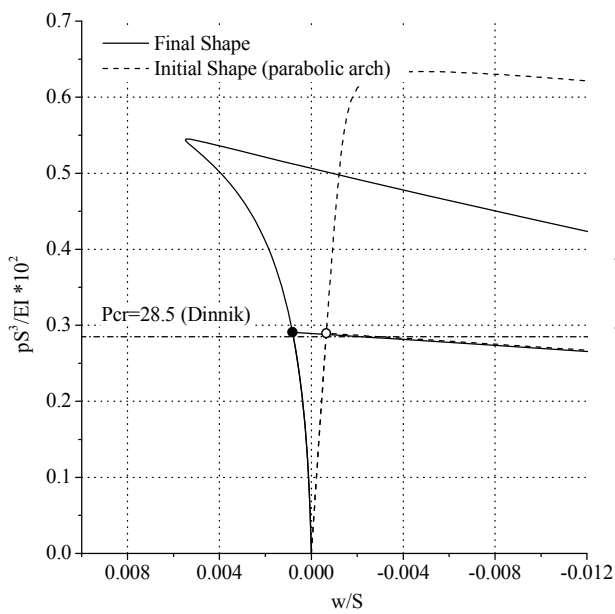


Fig. 1-3-b 釣合曲線 (等分布荷重, ピン支持, $H_0/S=0.1$ ($L/S=1.0260$), $h/S=0.01$)

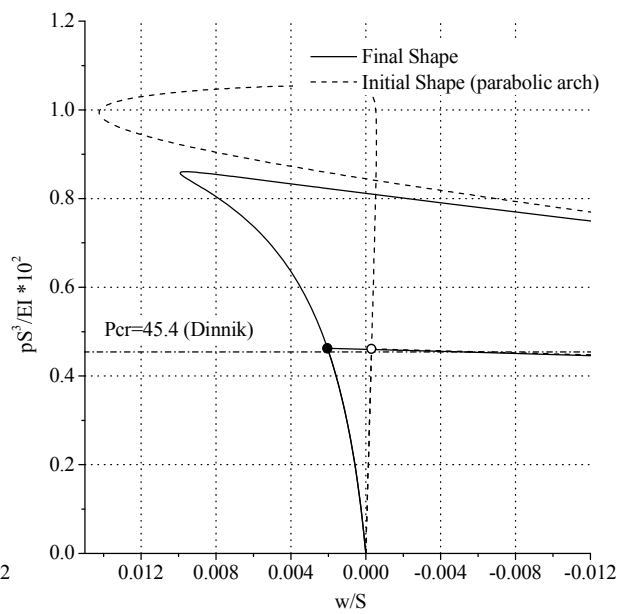


Fig. 1-4-b 釣合曲線 (等分布荷重, ピン支持, $H_0/S=0.2$ ($L/S=1.0981$), $h/S=0.01$)

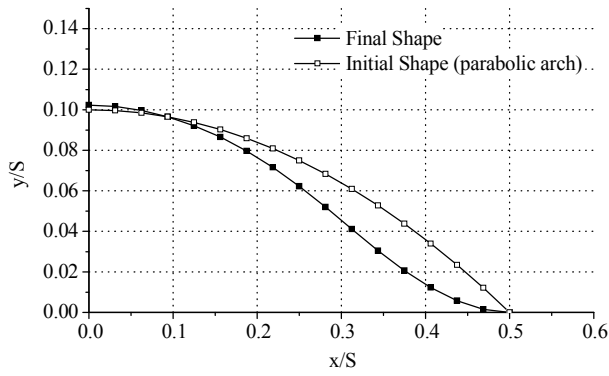


Fig. 1-5-a アーチ形状 (等分布荷重, 固定支持, $H_0/S=0.1$ ($L/S=1.0260$), $h/S=0.01$)

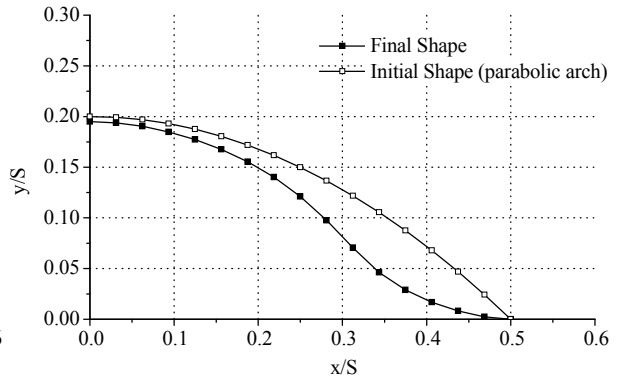


Fig. 1-6-a アーチ形状 (等分布荷重, 固定支持, $H_0/S=0.2$ ($L/S=1.0981$), $h/S=0.01$)

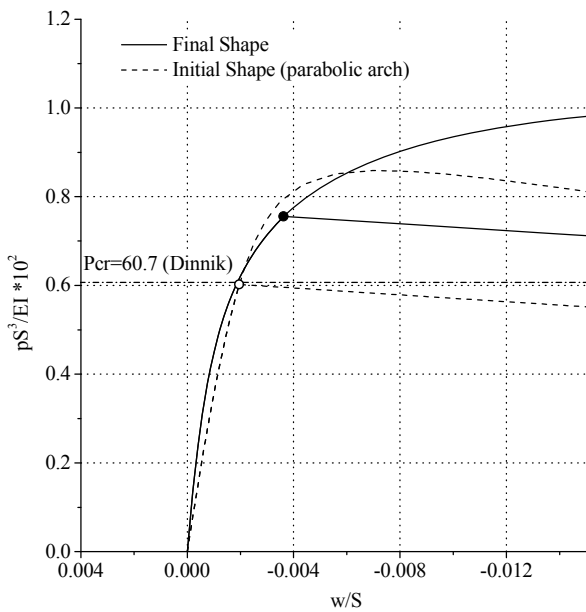


Fig. 1-5-b 釣合曲線 (等分布荷重, 固定支持, $H_0/S=0.1$ ($L/S=1.0260$), $h/S=0.01$)

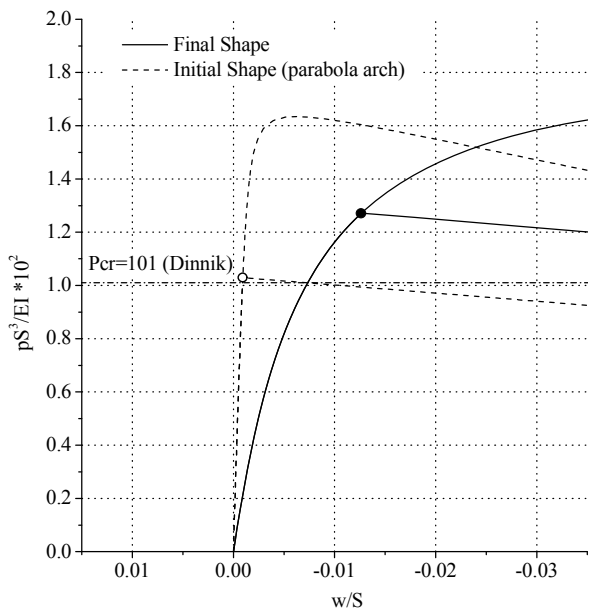


Fig. 1-6-b 釣合曲線 (等分布荷重, 固定支持, $H_0/S=0.2$ ($L/S=1.0981$), $h/S=0.01$)

Table1-1 最終形状（等分布荷重， $h/S=0.01$ ）

bound H_0/S (L/S)	pinned support		fixed support	
	0.1 (1.0260)	0.2 (1.0981)	0.1 (1.0260)	0.2 (1.0981)
y_1/S	0.010701	0.019635	0.001530	0.002276
y_2/S	0.021320	0.040742	0.005766	0.008187
y_3/S	0.031665	0.062151	0.012249	0.016860
y_4/S	0.041570	0.082772	0.020609	0.028771
y_5/S	0.050900	0.101973	0.030427	0.046175
y_6/S	0.059556	0.119493	0.041113	0.070599
y_7/S	0.067473	0.135267	0.051946	0.097528
y_8/S	0.074609	0.149318	0.062252	0.121128
y_9/S	0.080938	0.161693	0.071571	0.140218
y_{10}/S	0.086449	0.172440	0.079681	0.155464
y_{11}/S	0.091133	0.181592	0.086525	0.167637
y_{12}/S	0.094982	0.189163	0.092125	0.177306
y_{13}/S	0.097989	0.195139	0.096513	0.184822
y_{14}/S	0.100146	0.199478	0.099691	0.190322
y_{15}/S	0.101444	0.202119	0.101628	0.193742
y_{16}/S	0.101877	0.203008	0.102281	0.194913

Table 1-2 分岐座屈荷重（等分布荷重， $h/S=0.01$ ）

bound H_0/S (L/S)	pinned support		fixed support	
	0.1 (1.0260)	0.2 (1.0981)	0.1 (1.0260)	0.2 (1.0981)
final shape	29.08	46.23	75.53	127.0
initial shape (parabola)	28.95	46.10	60.22	102.9
ratio	1.004	1.003	1.254	1.235

(unit : pS^3/EI)

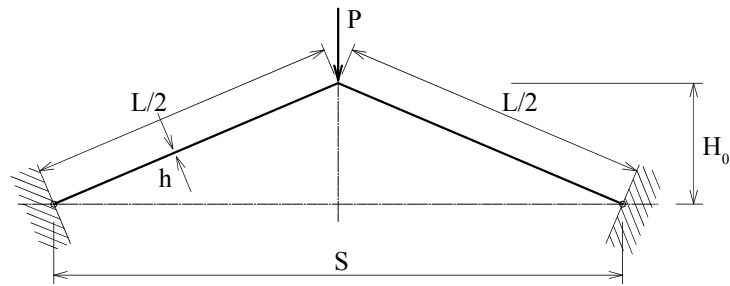


Fig. 1-7 解析モデル

支持条件をピン支持、 $H_0/S=0.1$ とした場合に得られた形状をFig.1-8-aに示す。図は対称性による1/2の部分を表しており、記号■及び□は、それぞれ最終形状及び初期形状の節点座標を表している。初期形状及び最終形状におけるアーチの頂部節点の鉛直変位と荷重の関係（釣合曲線）をFig.1-8-bに示す。実線は最終形状、破線は初期形状の釣合曲線を表している。また幾何学的非線形解析の妥当性を確認するために、山形フレームのEuler座屈荷重値を水平の一点鎖線で同図中に示した。

また同様に、ピン支持、 $H_0/S=0.2$ とした場合の結果をFig.1-9に、固定支持とし、 $H_0/S=0.1, 0.2$ とした場合の結果を、それぞれFig.1-10, Fig.1-11に示した。また、最適化によって得られた最終形状の節点座標をTable 1-3に、座屈荷重の値をTable 1-4にまとめて示した。

Fig.1-8-b～Fig.1-11-bの各解析結果の釣合曲線を見ると、水平の一点鎖線と初期形状の分岐点の縦軸の値はほぼ同じ値をとり、山形フレームの分岐座屈荷重はEuler座屈荷重によって評価可能であることが確認できる。また、全ての解析において、初期形状、最終形状ともに最小座屈は分岐座屈となっている。

Fig.1-8-a～Fig. 1-11-aの各解析による最終形状を見ると、最適化により得られる形状は、等分布荷重の最適化結果と同様、境界条件によって大きく異なっている。境界を固定支持とした場合では、境界付近に逆符号の曲率を有する形状が得られており(Fig.1-10-a, Fig.1-11-a)、等分布荷重の場合と同様の傾向の形状が得られているが、境界ピン支持、固定支持ともにライズが高くなると、荷重の作用する節点が周辺節点より低い位置となり、アーチ形状は頂部で落ち込んだ形状となっている(Fig.1-9-a, Fig.1-11-a)

最終形状の座屈荷重は、初期形状の座屈荷重に比べ1～2割程度上昇した。また、最終形状は曲げやせん断力を比較的受けやすい形状となっており、分岐点に到るまでの変位が大きくなっている。

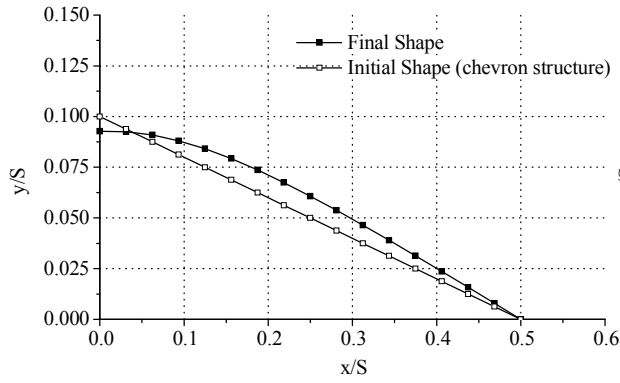


Fig. 1-8-a アーチ形状 (集中荷重, ピン支持, $H_0/S=0.1, h/S=0.01$)

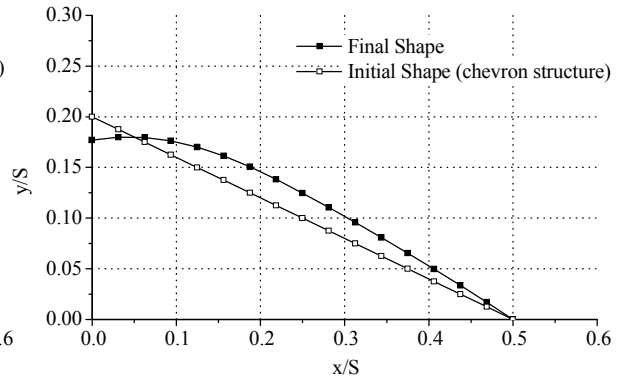


Fig. 1-9-a アーチ形状 (集中荷重, ピン支持, $H_0/S=0.2, h/S=0.01$)

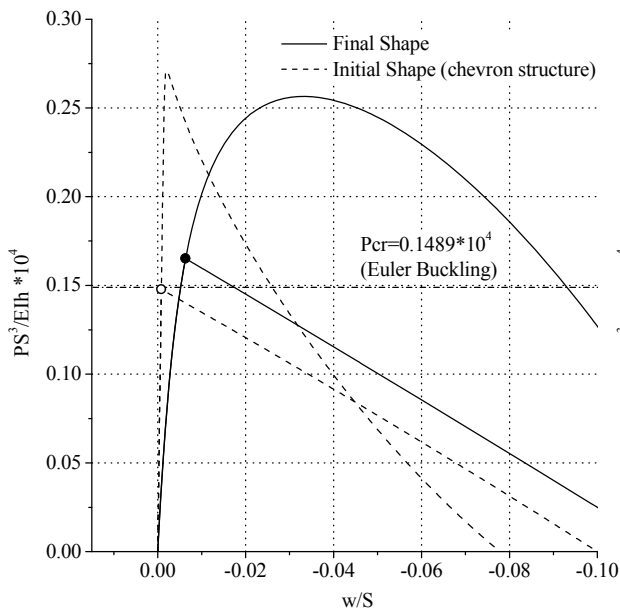


Fig. 1-8-b 釣合曲線 (集中荷重, ピン支持, $H_0/S=0.1, h/S=0.01$)

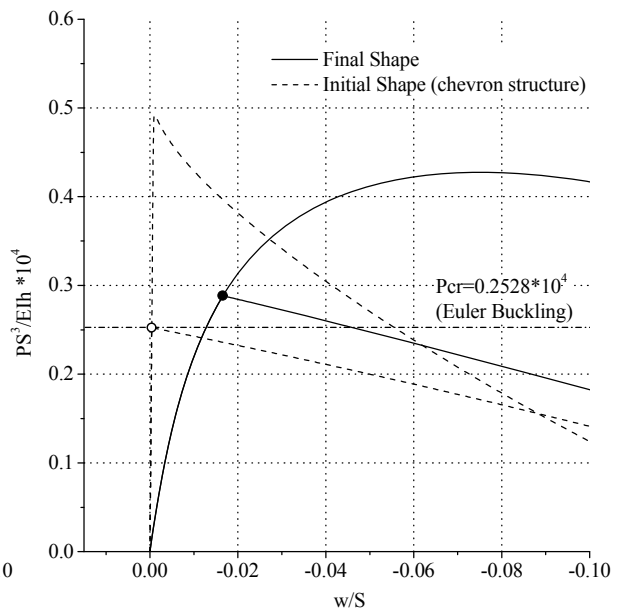


Fig. 1-9-b 釣合曲線 (集中荷重, ピン支持, $H_0/S=0.2, h/S=0.01$)

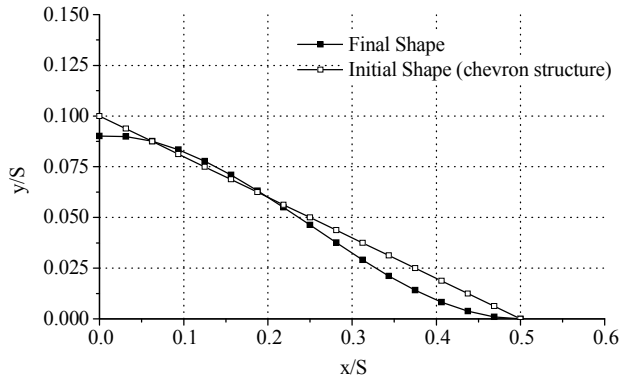


Fig. 1-10-a アーチ形状（集中荷重，固定支持， $H_0/S=0.1, h/S=0.01$ ）

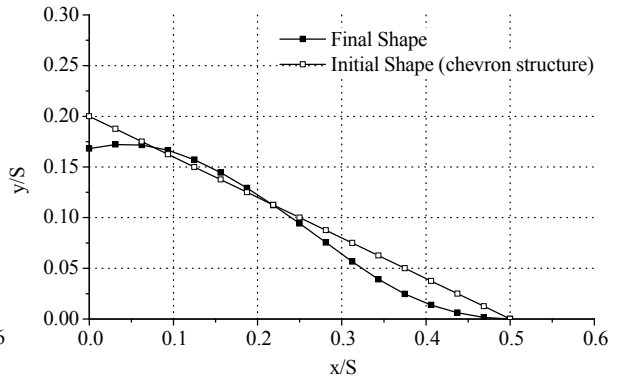


Fig. 1-11-a アーチ形状（集中荷重，固定支持， $H_0/S=0.2, h/S=0.01$ ）

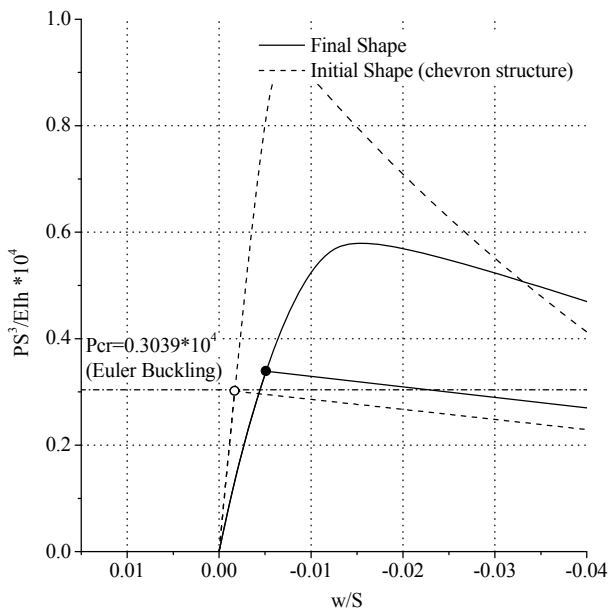


Fig. 1-10-b 釣合曲線（集中荷重，固定支持， $H_0/S=0.1, h/S=0.01$ ）

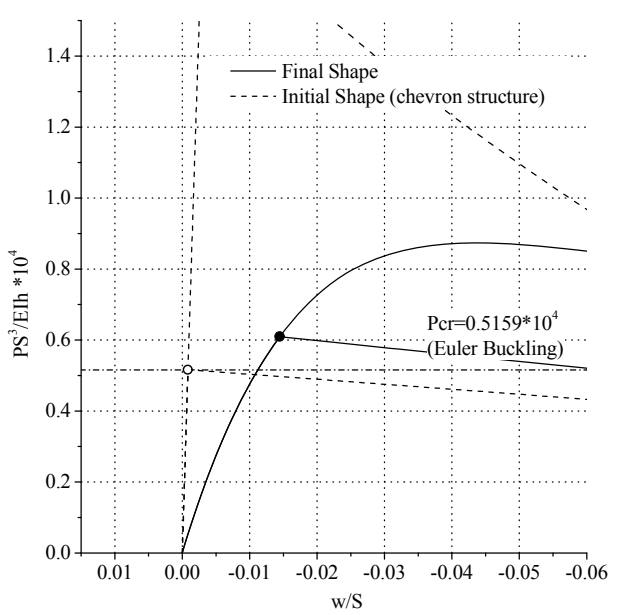


Fig. 1-11-b 釣合曲線（集中荷重，固定支持， $H_0/S=0.2, h/S=0.01$ ）

Table 1-3 最終形状 (集中荷重, $h/S=0.01$)

bound H_0/S (L/S)	pinned support		fixed support	
	0.1 (1.0198)	0.2 (1.0770)	0.1 (1.0198)	0.2 (1.0770)
y_1/S	0.007921	0.016909	0.000990	0.001626
y_2/S	0.015809	0.033533	0.003807	0.006263
y_3/S	0.023632	0.049713	0.008242	0.013829
y_4/S	0.031364	0.065436	0.014100	0.024648
y_5/S	0.038978	0.080771	0.021153	0.039047
y_6/S	0.046443	0.095781	0.029104	0.056506
y_7/S	0.053716	0.110457	0.037608	0.075437
y_8/S	0.060735	0.124677	0.046322	0.094298
y_9/S	0.067411	0.138183	0.054950	0.112325
y_{10}/S	0.073632	0.150587	0.063237	0.129176
y_{11}/S	0.079257	0.161404	0.070940	0.144402
y_{12}/S	0.084130	0.170117	0.077780	0.157210
y_{13}/S	0.088080	0.176270	0.083438	0.166591
y_{14}/S	0.090941	0.179541	0.087576	0.171700
y_{15}/S	0.092551	0.179763	0.089888	0.172188
y_{16}/S	0.092759	0.176887	0.090145	0.168182

Table 1-4 分岐座屈荷重 (集中荷重, $h/S=0.01$)

bound H_0/S (L/S)	pinned support		fixed support	
	0.1 (1.0198)	0.2 (1.0770)	0.1 (1.0198)	0.2 (1.0770)
final shape	1652	2883	3389	6094
initial shape (chevron)	1478	2524	3016	5162
ratio	1.118	1.142	1.124	1.181

(unit : PS^3/EIh)

1.3.3 解析結果の考察

1.3.3.1 他の関数形状を有するアーチとの座屈荷重の比較

先の最適化により得られた最終形状は最適性条件をほぼ満たしているものの、局所解に陥っている可能性は否定できず、解の妥当性を判断することは困難である。この為、良好な結果が得られていることを確認するために、他の関数形状を有する幾つかのアーチに対して幾何学的非線形解析を行い、座屈荷重の比較を行う。

採用する形状は最終形状と同じアーチ長さを持つ、放物線アーチ、山形フレーム、円弧アーチ、三角関数で表現される2種類のアーチの合計5種類とする。三角関数で表されるアーチはそれぞれ次式により与える。

$$\text{sinusoidal arch 1 : } y = A_1 \cos \frac{\pi x}{S} \quad (1-53)$$

$$\text{sinusoidal arch 2 : } y = A_2 \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{S} \right) \quad (1-54)$$

ここに、 A_1, A_2 はアーチ長さが最終形状と等しくなるように定められる。

例として、 $L/S=1.0260$ 時の各アーチの形状をFig. 1-12に示す。これらのアーチ形状に対して最終形状が得られた最適化解析時と同じ外力、境界条件を与えて幾何学的非線形解析を行い、分岐座屈荷重を算定する。

等分布荷重作用下において最適化によって得られた最終形状の分岐座屈荷重値と、5種類のアーチ形状において算定された分岐座屈荷重値を、まとめてTable 1-5に示す。表中に()内に示された値は極限点型の座屈荷重値を示しており、分岐座屈を生じないことを表す。最終形状は、他の形状と比較して座屈荷重が最も大きいことが確認できる。同様に、スパン中央に集中荷重を与えた場合の最適形状と、5種類のアーチ形状の座屈荷重値をTable 1-6に示す。この場合においても、最終形状の座屈荷重が他の形状と比べ最も大きいことが確認できる。以上の結果から、先の最適化では局所解に陥ることなく、良好な結果が得られているものと考えられる。

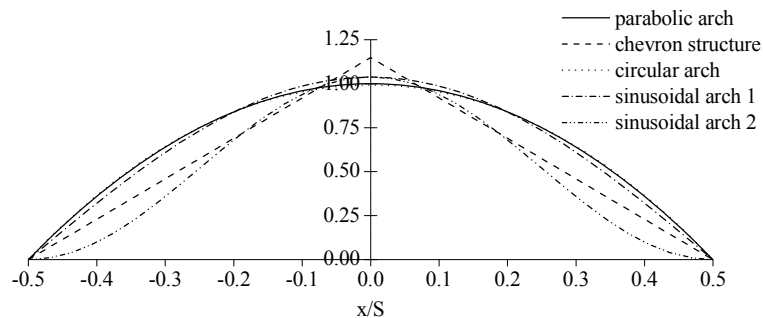


Fig. 1-12 アーチ形状 ($L/S=1.0260$)

Table1-5 分岐座屈荷重の比較（等分布荷重， $h/S=0.01$ ）

(unit : pS^3/EI)				
bound L/S	pinned support		fixed support	
	1.0260	1.0981	1.0260	1.0981
final shape	29.08	46.23	75.53	127.0
initial shape (parabolic arch)	28.95	46.10	60.22	102.9
chevron structure	22.60	38.42	64.57	109.1
circular arch	28.86	45.67	58.86	95.7
sinusoidal arch 1	28.98	46.10	66.65	111.0
sinusoidal arch 2	(15.38)	(27.51)	71.98	121.8

Table1-6 分岐座屈荷重の比較（集中荷重， $h/S=0.01$ ）

(unit : PS^3/EIh)				
bound L/S	pinned support		fixed support	
	1.0198	1.0770	1.0198	1.0770
final shape	1652	2883	3389	6094
initial shape (chevron structure)	1478	2524	3016	5162
parabolic arch	1550	2795	(1976)	(3819)
circular arch	1536	2730	(1919)	(3433)
sinusoidal arch 1	1626	2862	2456	4652
sinusoidal arch 2	1186	2162	3386	5966

1.3.3.2 線形座屈解析による検討

前節で示した最終形状が、大きな座屈荷重を有する要因について検討を行う。構造形状と座屈荷重の関係をより単純化して考察するために、座屈前変形を無視した線形座屈問題として扱う。

線形座屈荷重は、次式のような一般固有値問題として算定される。

$$[\mathbf{K}_L + \Lambda_i^c \mathbf{K}_G] \phi_i = \mathbf{0} \quad (1-55)$$

ここに、 \mathbf{K}_L は線形剛性行列を表す。 \mathbf{K}_G は幾何剛性行列を表し、線形座屈では線形解析により算定された応力を用いて表現される。 $\Lambda_i^c, \phi_i (i=1, \dots, N_d)$ はここではそれぞれ、線形座屈荷重係数、線形座屈モードを表す。

等分布荷重作用下における最適化によって得られた最終形状及び、これと同じアーチ長を持つ先の5種類のアーチ形状に対して、線形座屈解析を行った。その結果をTable 1-7に示す。表中のPcr_linと記入した列の値が、最小の線形座屈荷重値を表している。また、比較のためにPcr_nlと記入した列に非線形座屈荷重の値を示した。同様に、集中荷重作用時の最終形状及び各種アーチ形状における線形座屈荷重値をTable 1-8に示す。

これらの表を見ると、線形座屈荷重と非線形座屈荷重の値は、比較的よく対応していることがわかる。各アーチ形状の線形座屈荷重値を比較すると、一部、座屈荷重の大小関係に入れ替わりを生じているが、これらはもともとよく似た形状である。従って、線形座屈荷重によって評価しても、アーチ

Table 1-7 線形座屈荷重及び剛性の比較 (等分布荷重)

bound L/S	1.0260			1.0981			1.0260			1.0981		
	Per_lin (pS ³ /EI)	(Per_nl) (pS ³ /EI)	α	β	Per_lin (pS ³ /EI)	(Per_nl) (pS ³ /EI)	α	β	Per_lin (pS ³ /EI)	(Per_nl) (pS ³ /EI)	α	β
initial shape (parabolic arch)	29.12	(28.95)	1.000	1.000	46.14	(46.10)	1.000	1.000	61.47	(60.22)	1.000	1.000
final shape	29.24	(29.08)	1.006	1.002	46.33	(46.23)	1.021	1.017	75.12	(75.53)	1.019	0.834
chevron structure	27.20	(22.60)	1.058	1.132	44.81	(38.42)	1.215	1.251	70.26	(64.57)	1.040	0.910
circular arch	29.07	(28.86)	0.998	1.000	45.85	(45.67)	0.974	0.980	60.72	(58.86)	1.000	1.012
sinusoidal arch 1	29.28	(28.98)	1.013	1.007	46.41	(46.10)	1.045	1.039	65.61	(66.65)	1.004	0.941
sinusoidal arch 2	26.55	(-)	1.069	1.172	44.32	(-)	1.261	1.313	77.76	(71.98)	1.038	0.820

Table 1-8 線形座屈荷重及び剛性の比較 (集中荷重)

bound L/S	1.0198			1.0770			1.0198			1.0770		
	Per_lin (PS ³ /Elh)	(Per_nl) (PS ³ /Elh)	α	β	Per_lin (PS ³ /Elh)	(Per_nl) (PS ³ /Elh)	α	β	Per_lin (PS ³ /Elh)	(Per_nl) (PS ³ /Elh)	α	β
initial shape (chevron structure)	1493	(1478)	1.000	1.000	2529	(2524)	1.000	1.000	3075	(3016)	1.000	1.000
final shape	1647	(1652)	0.977	0.885	2850	(2883)	0.903	0.802	3436	(3389)	0.996	0.891
parabolic arch	1668	(1550)	0.958	0.857	2873	(2795)	0.855	0.753	2919	(-)	0.970	1.022
circular arch	1667	(1536)	0.957	0.857	2876	(2730)	0.841	0.740	2897	(-)	0.970	1.029
sinusoidal arch 1	1666	(1626)	0.967	0.867	2850	(2862)	0.885	0.786	3075	(2456)	0.973	0.973
sinusoidal arch 2	1448	(1186)	1.008	1.039	2507	(2162)	1.030	1.040	3436	(3386)	0.997	0.893

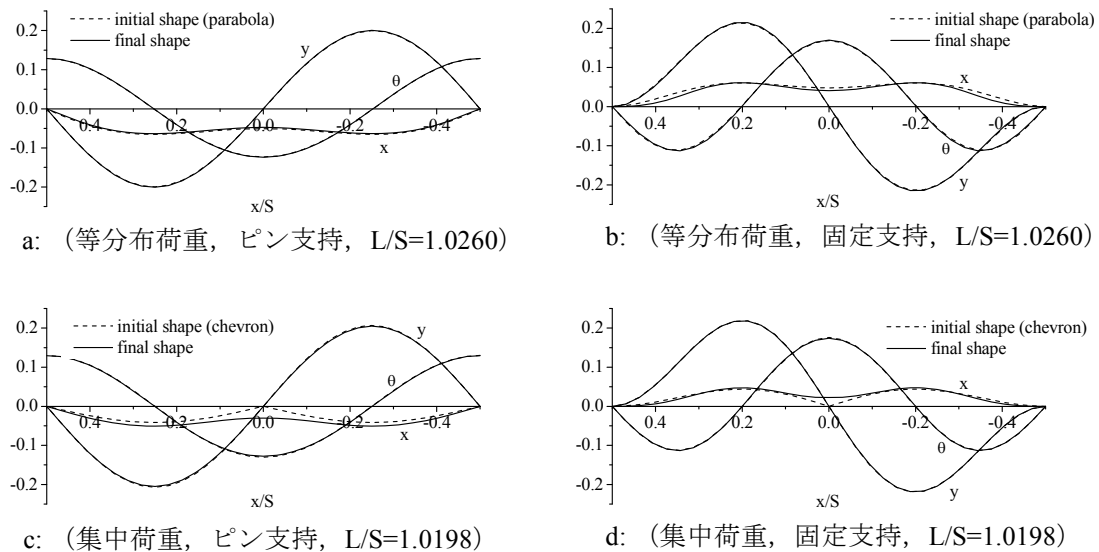


Fig.1-13 線形座屈モードの比較

形状と座屈荷重の関係の傾向は把握できると考える。

座屈問題を(1-55)式の線形座屈として扱う場合、座屈荷重を上昇させるためには、座屈モードの変形に対して線形剛性を大きくするか、或いは幾何剛性を小さくする必要がある。最終形状がこの2つのどちらの要因によって座屈荷重が上昇しているのか調査を行う。

まず、初期形状及び最終形状の線形座屈モードが大きく異なっていないことを示すために、各解析条件下(外力、境界条件、アーチ長)における最終形状の線形座屈モードを実線で、初期形状の線形座屈モードを点線で、Fig. 1-13-a~dに示す。線形座屈モードは $\phi_1^T \phi_1 = 1$ となるように正規化しており、x方向、y方向、 θ 方向ごとに示している。両者の線形座屈モードは、x方向で若干の違いが見られるが、ほぼ同じ分布を示す。アーチ形状が変化しても、座屈モードは大きく変化していないことがわかる。

最適化によって座屈荷重が上昇した要因を示すために、最終形状及び各種アーチ形状の、座屈モード方向に対する線形剛性及び幾何剛性の大きさを次式によって算定する。

$$\alpha = \phi_1^T \mathbf{K}_L \phi_1 / \phi_1^{ini T} \mathbf{K}_L^{ini} \phi_1^{ini} \quad (1-56)$$

$$\beta = \phi_1^T \mathbf{K}_G \phi_1 / \phi_1^{ini T} \mathbf{K}_G^{ini} \phi_1^{ini} \quad (1-57)$$

$$\text{ただし、} \phi_1^T \phi_1 = \phi_1^{ini T} \phi_1^{ini} = 1$$

ここに、上添え字のiniは、最適化において初期形状として用いられた構造によるものであることを表し、等分布荷重を作用させたモデルでは放物線アーチ、集中荷重を作用させたモデルでは山形フレームに対応する。すなわち、 α, β は線形座屈モード方向に対する線形剛性及び幾何剛性の大きさを、初期形状における大きさを基準化したものである。これら α, β の値を算定した結果をTable 1-7, Table 1-8の表中に示す。等分布荷重作用時の最終形状における α, β の値を見ると (Table 1-7)、固

定支持の場合では、L/Sに関わらず線形剛性が僅かに大きくなり、幾何剛性が1,2割程度小さくなっていることが確認できる。すなわち、座屈荷重が上昇した要因は主に幾何剛性が上昇したことによるものであると言える。ピン支持の場合については、初期形状と最終形状はともによく似た形状をしており、座屈荷重も殆ど変化していないためここでは触れない。集中荷重作用時の最終形状では、支持条件やL/Sに関わらず線形剛性が僅かに小さくなり、幾何剛性が1,2割程度小さくなっていることが確認できる。すなわちこの場合においても、座屈荷重が上昇した要因は幾何剛性の変化によるものであることがわかる。

幾何剛性は応力の関数となっているため、応力分布の変化（例えば軸圧縮力が小さくなること）によって座屈荷重が上昇したと言う事も可能であるかもしれないが、同じ応力の分布でも形状そのものが異なれば幾何剛性は変化するため、問題は単純でない。さらに詳細な調査を要するが、これについては今後の課題としたい。また参考までに、1.3.1節における初期形状、最終形状の線形弾性時の応力図をFig.1-14~Fig.1-17に示す。図中、初期形状は曲げやせん断力を殆ど生じないためこれらの応力図は省略している。

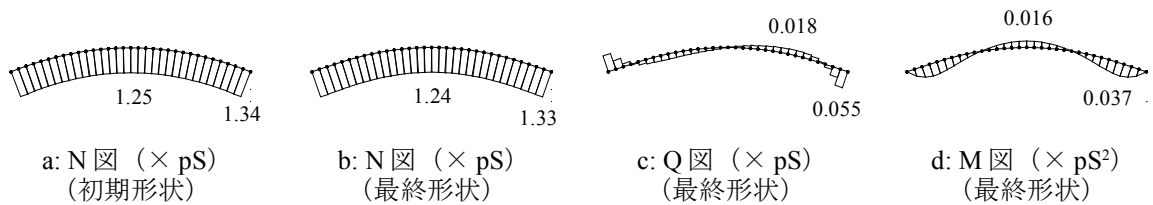


Fig. 1-14 応力図（等分布荷重、ピン支持、L/S=1.0260）

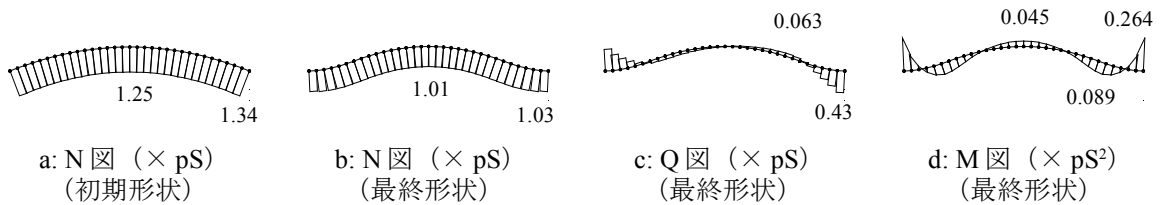


Fig. 1-15 応力図（等分布荷重、固定支持、L/S=1.0260）

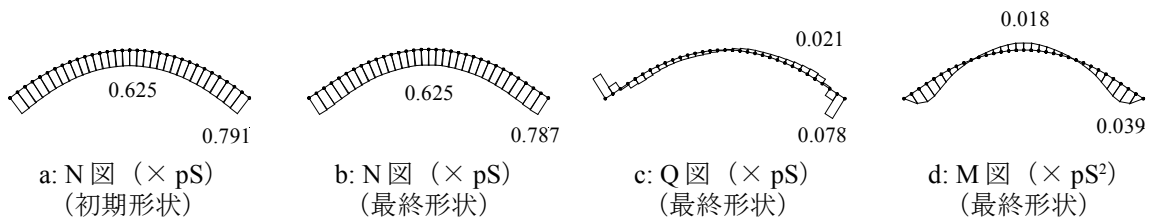


Fig. 1-16 応力図（等分布荷重、ピン支持、L/S=1.0981）

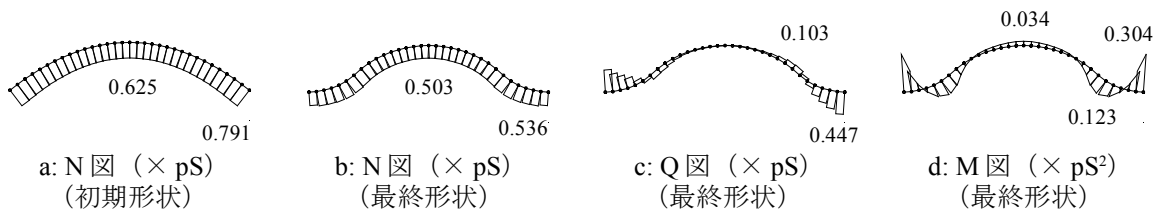


Fig. 1-17 応力図（等分布荷重、固定支持、L/S=1.0981）

1.3.3.3 最終形状の形状不整に対する敏感性の検討

最適化を行うことにより得られた構造物は、不整に対して敏感な構造物となっている可能性がある。この為、1.3.1節の初期形状および最終形状に対して、形状不整を与えて幾何学的非線形解析を行い、座屈荷重の低下を調査する。

不整の分布は次のように定める。対称分岐点が極限点に変化するような不整 (major imperfection) が与えられた時の座屈荷重係数 Λ^M は、近似的に次式によって評価できる¹⁰⁾。

$$\Lambda^M = \Lambda^C - \frac{1}{2}(A^C)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\partial \lambda_1^F}{\partial \Lambda} \right)^{-1} \left[3(\phi_1^C)^T \frac{\partial \mathbf{E}^C}{\partial \varepsilon} \varepsilon \right]^{\frac{2}{3}} \quad (1-58)$$

ここに、

$$A^C = \phi_1^{CT} \left[\frac{\partial^2 \mathbf{K}_T^C}{\partial D_i \partial D_j} \phi_{1i}^C \phi_{1j}^C + 3 \sum_{s=2}^{N_d} (\lambda_s^C)^{-1} \frac{\partial \mathbf{K}_T^C}{\partial D_i} \phi_{si}^C \right] \phi_1^C$$

であり、 ε は不整を表す。 λ_s^C, ϕ_s^C はそれぞれ完全系の臨界点における接線剛性 \mathbf{K}_T^C の s 番目の固有値、固有モードを表し、上式では1番目の固有値 λ_1^C が零であるとしている。 $\partial \lambda_1^F / \partial \Lambda$ は λ_1^C の (分岐方向でなく) 主経路方向の荷重係数に対する勾配を表す。 \mathbf{E}^C は臨界点における釣合方程式を表し、 $\mathbf{E} = \mathbf{Q} - \Lambda \mathbf{F}$ (\mathbf{Q} は内力ベクトル、 \mathbf{F} は外力モード) である。 ϕ_{si}^C は ϕ_s^C の第 i 成分を表し、 D_i は変位ベクトル \mathbf{D} の第 i 成分を表す。また、 N_d は変位の自由度を表す。

支持点を除いた各節点の y 方向に形状不整を与えるものとし、この不整ベクトル $\varepsilon = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{N_r}]^T$ を $\varepsilon = \xi \Delta \mathbf{y}$ と表す。 ξ は不整の大きさを表すパラメータであり、 $\Delta \mathbf{y} (= [\Delta y_1, \dots, \Delta y_{N_r}]^T)$ は不整の分布を表す $\|\Delta \mathbf{y}\| = 1$ となるように正規化されたベクトルである。この場合、(1-58)式は次式のように表すことができる (ただし、外力モードは形状に依存しないものとしている)。

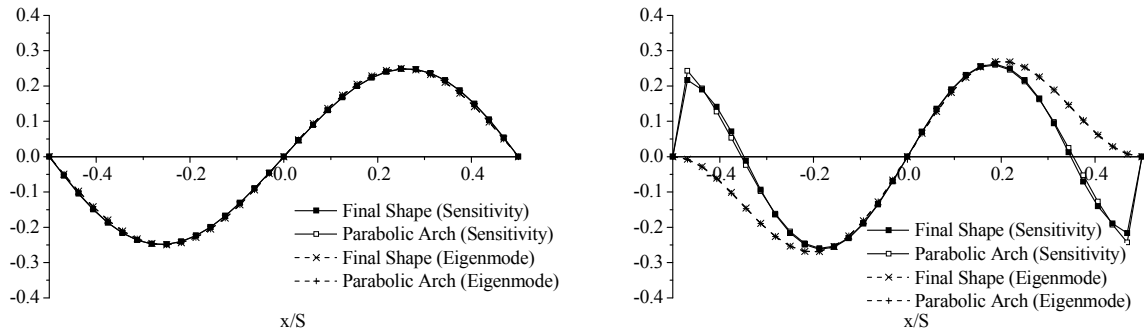
$$\Lambda^M = \Lambda^C - \frac{1}{2}(A^C)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\partial \lambda_1^F}{\partial \Lambda} \right)^{-1} \left[3\xi \sum_{i=1}^{N_r} (\phi_1^C)^T \frac{\partial \mathbf{Q}^C}{\partial r_{yi}} \Delta y_i \right]^{\frac{2}{3}} \quad (1-59)$$

上式 Λ^M が最も小さくなるような不整モード $\Delta \mathbf{y}$ は、上式の [] 内を最大とする分布であり、次式によって表せる。

$$\Delta y_i = \alpha (\phi_1^C)^T \frac{\partial \mathbf{Q}^C}{\partial r_{yi}} \quad (1-60)$$

ここに、係数 α は $\|\Delta \mathbf{y}\| = 1$ となるように定められる。

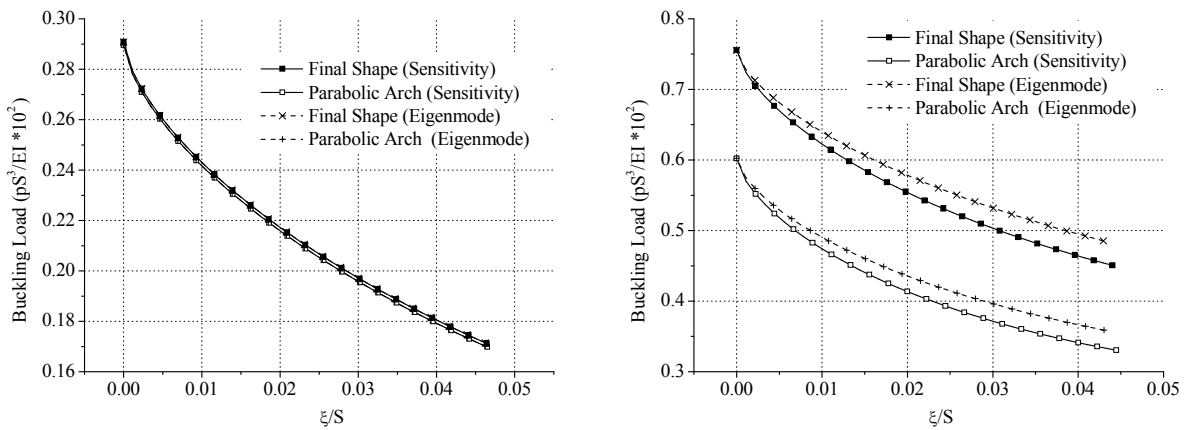
検討する形状は、1.3.1節におけるライズスパン比 $H_0/S=0.1$ ($L/S=1.0260$) の初期形状及び最終形状とする (最終形状は、境界条件をピン支持とした場合と、固定支持とした場合の2種類ある)。(1-60)式に従って求めた形状不整の分布を、ピン支持の場合について Fig.1-18-a に、固定支持の場合について Fig.1-18-b にそれぞれ示す。各図中口及び■記号が、それぞれ初期形状及び最終形状の(1-60)式による不整分布を表す。また、一般には不整の影響を検討する際に座屈モードが利用されることも多いため、同図中には非線形座屈モードの y 方向成分も同時に示している。+及び×記号は、それぞれ初期形状及び最終形状の非線形座屈モードの y 方向成分を表している。ピン支持の場合、(1-60)式の最敏



a: ピン支持

b: 固定支持

Fig.1-18 形状不整モード (分布荷重荷重, $L/S=1.0261$)



a: ピン支持

b: 固定支持

Fig.1-19 形状不整による座屈荷重の低下 (分布荷重荷重, $L/S=1.0261$)

感不整の分布と非線形座屈モードは殆ど変わらない。一方、固定支持の場合では、最敏感不整分布と非線形座屈モードの分布は支持点付近で大きく異なっている。

不整パラメータ ξ と座屈荷重係数の関係を、ピン支持の場合について Fig.1-19-a に、固定支持の場合について Fig.1-19-b に示す。各形状及び不整の分布に対応する記号は、Fig.1-18 の場合と同様である。ピン支持の場合、初期形状と最終形状は形状に大きな差はないため、不整に対する性状はほぼ同じである。固定支持の場合では、両者の形状は大きく異なっているにも関わらず、不整パラメータ ξ の大きさに対し座屈荷重の低下はほぼ同じである。以上の結果より、最終形状は、不整に対し特に敏感なものではないことがわかる。

1.3.3.4 外力モードの違いによる最適解の比較

1.3.1節と1.3.2節の解析結果では、外力の分布が大きく異なっているにもかかわらず、最適化を行うことにより得られた形状は比較的良く似た形状が得られている。すなわち、ピン支持では頂部付

近で曲率が大きく境界付近では直線的なアーチ形状が得られ、固定支持では境界付近で逆符号の曲率を持ったアーチ形状が得られた。ここでは、他の幾つかの外力分布に対して最適化を行った結果を示す。

外力分布は、Fig.1-20に示す3種類とする。Load Case A は中央部分荷重、Load Case Bは支持点から頂部に向かって線形増加する外力分布、Load Case Cは逆に頂部から支持点に向かって線形増加する外力分布である。

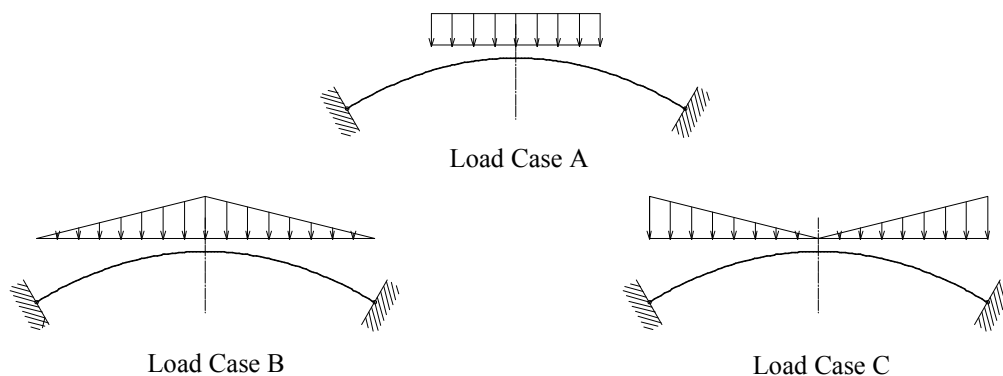


Fig.1-20 外力分布

これらの外力に対して、支持条件をピン、固定にした場合についてそれぞれ最適化を行い、得られた最終形状をFig.1-21-a,bに示す。解析条件は、 $h/S=0.01$, $L/S=1.0260$ とし、初期形状は放物線アーチとしている。図中の○記号は、1.3.1節で得られた等分布荷重を与えた場合の最終形状であり、△, ×, □記号はそれぞれLoad Case A, B, Cを与えた場合の最終形状を表す。最終形状はいずれの場合も比較的良く似た形状が得られており、外力の分布形状が最適解に与える影響は比較的小さいことがわかる。I 部で扱った曲げモーメント分布最小化問題では、アーチの最適形状は外力分布に対して敏感に反応する。これに対して、安定性の問題では外力分布が解に与える影響は鈍いことがわかる。実際の構造物では外力分布が確定的であることは稀であるので、このような性質を持つことは望ましいと言える。

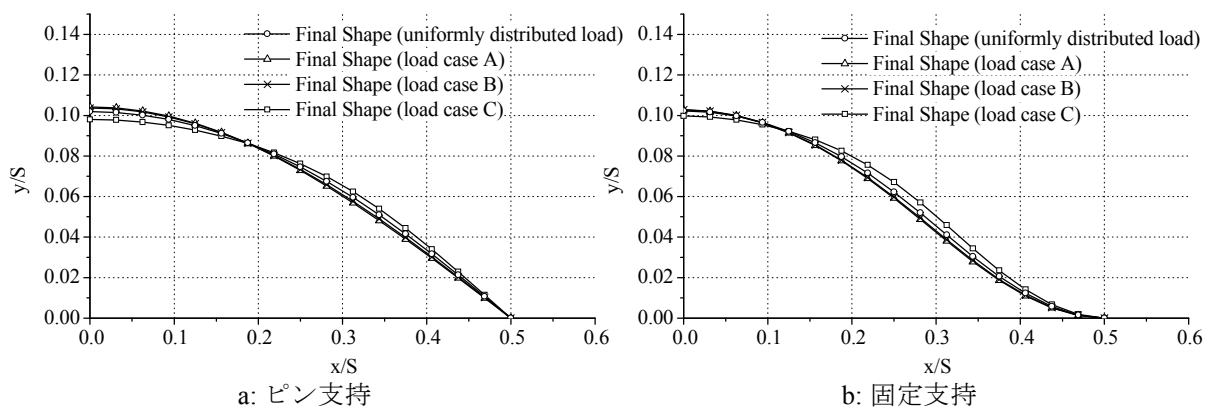


Fig.1-21 外力分布

1.4 1章のまとめ

アーチ長を一定とする制約条件のもとで、座屈荷重を最大とするアーチの形状最適化問題を扱った。外力分布及びアーチ形状は左右対称性を有するものとし、最小座屈が対称分岐点となる場合の問題について扱った。得られた主要な結果は次のようにまとめられる。

- 1) 対称分岐座屈荷重を最大とする対称なアーチ形状を求める問題に対し、感度解析に基づく最適化手法を適用できる。
- 2) 座屈荷重の大きい形状を簡単に説明すれば、最小座屈の座屈モードの変形に対し、線形剛性の大きい或いは幾何剛性の小さい形状であると言える。またこのような形状は、I部で扱った曲げモーメントの発生の小さい形状と、必ずしも同じ傾向に無い。
- 3) 最適形状の座屈荷重は、他のアーチ形状と比べ、特に不整敏感性を有していない。
- 4) 外力分布が最適形状に与える影響は比較的小さい。

本章で得られたアーチ形状は、ピン支持では円弧や放物線といった幾何学的なアーチ形状と比べて座屈荷重に大きな違いは無く、また、固定支持では座屈荷重は比較的大きく上昇するものの、曲げモーメントやせん断力を受けやすく部材応力の点では不利な形状である。従って本章で得られた形状は、実際の構造物へ積極的に適用されるようなものではなかった。

シェルやラチスシェルなどの曲面構造の座屈性状は、アーチと大きく異なる。この為、ここで示した結果から、これらの構造物における座屈荷重の大きな形状や、一般的な幾何学形状に比べてどの程度座屈荷重の上昇が得られるか等については、予測することは困難である。従って次章では、本章で扱った研究をさらに進めて三次元に拡張し、スペースフレームの問題を扱う。

2. 重複臨界型の座屈荷重を有するスペースフレームの形状最適化

2.1 はじめに

シェルやラチスドームなどの空間構造では、外力に対し主に圧縮力で抵抗するため座屈に対する安全性を確保することが重要視される。座屈挙動は、構造物の幾何学的な寸法、形状に大きく依存する。このため、構造形状を決定する設計の初期段階において、安定性の高い構造形状を検討し、選択することは有効である。しかし、座屈は一般には非線形問題であるため、安定性の高い形状を直観的に判断するのは難しく、また、支配方程式から構造形状と安定性の関係を直接的に検討することも困難である。構造形状と安定性の関係は初期不整という観点からは多くの研究がされているものの、構造形状そのものと座屈荷重の関係が議論されることは少なく、その大域的な性状は明らかになっていない。座屈挙動は与えられた形を解析することで理解されるが、その結果が構造形状にフィードバックされることは殆どない。

本章では、設計外力に対し安定性の高い構造形状を生成することを目的として、座屈荷重を目的関数とした単層スペースフレームの形状最適化問題を扱う。この問題により得られる数値解析結果の力学性状について詳細に調査することで、座屈荷重と構造形状の間にある力学的な傾向を把握できるものと考えている。

ところで、座屈荷重を目的関数として最適化を行った場合、ある座屈モードの座屈荷重を上昇させると他のモードの座屈荷重が下降し、最適解で複数の座屈荷重係数が重複する傾向があることが知られている。扁平アーチの問題ではこのような傾向のないことはPlaut¹⁾により解析的に示されている。前章のアーチの問題においても、最適解における座屈は全て単純臨界点であり、最適化によって極限点と分岐点が近接することも特になかった。しかし、本章で扱うスペースフレームの問題では、最適解で座屈荷重が重複する傾向にあるようである。

座屈荷重を算定する場合には、幾何学的非線形解析によって釣合経路を追い接線剛性の特異点を求めることで評価する方法（非線形座屈荷重）と、座屈前変形を無視し、線形固有値解析により近似的に評価する方法（線形座屈荷重）が一般的に用いられる。数理計画法を用いた最適化手法では、座屈荷重係数の感度係数を必要とするが、非線形座屈荷重の感度解析法では、極限点型、対称分岐点型、非対称分岐点型など臨界点の性質に依存して感度の評価方法を変える必要がある^{4),5)}（前章1.2.3節参照）。非線形座屈荷重係数に対して重複を考慮しながら最大化を行う場合、釣合経路上に存在する複数の臨界点をそれぞれ正確に求め、これらの臨界点が極限点型か分岐点型か判別したうえで感度を評価しなければならない。これは極めて煩雑な手順を要し、解を求めることは現実的でない。一方で、目的関数に線形座屈荷重を採用した場合、全ての座屈荷重は固有値解析により得られ、感度は同一の

式で評価可能であるため、座屈荷重の重複を考慮するには比較的扱いやすいものとなる。しかし、この方法では座屈前変形を考慮していないため、変位の影響が大きい場合には、必ずしも有効な解は得られない。また、最適化手法を適用する際に、最小座屈荷重の感度の不連続性や、座屈荷重が重複した場合の感度⁶⁾については考慮する必要がある。

既往の研究において、E.RammやR.Reitingerら²⁾は非線形座屈荷重の感度係数を用いてシェルの座屈荷重の最大化を行っているが、座屈荷重の重複については考慮されていない。陳、川口らはスペースフレームの非線形座屈荷重最大形態を求めている³⁾。そこでは、座屈点近傍に到るまでの主経路上での荷重増分量の和の最大化を行っており、座屈荷重そのものが最大化されるわけではない。この他、座屈問題を扱った最適化研究では、トラスの部材断面を設計変数としたものが多い^{8),9),15)-21)}。M.Ohsaki⁸⁾は釣合経路上で臨界点前後の平衡点での接線剛性の固有値を利用し、内挿によって非線形座屈荷重係数の感度係数を求める方法を提案しており、小規模なトラス構造において非線形座屈荷重が重複する場合についても解析を行っている。寒野、大崎⁹⁾は最適化手法に半正定値計画法を用いることで、線形座屈荷重の重複度が大きい問題に対しても困難なく解を求めることが可能であることを示している。

数理計画法を用いた空間構造の形状最適化問題において、非線形座屈荷重の最大化を行うと最適解で非線形座屈荷重の重複がおこる事が予測できるが、解析的に困難であるために、そのような結果を示した文献は見当たらない。本研究は、物理的な直観力では理解しがたい構造形状と座屈荷重の関係を議論することを目的としており、そのためには、信頼性が高く精度の良い解を提示する必要がある。非線形座屈荷重を厳密に扱うのは困難であるため、座屈荷重の評価には線形固有値解析を利用する。ただし、座屈前変形の影響を近似的に考慮するために、接線剛性行列の非線形項を、釣合経路上の任意点における剛性を用いて線形近似し、座屈荷重及び座屈荷重感度を評価する解析手法を提案する。この方法は数値的に不安定な臨界点を求める複雑な手順を採らずに、厳密解に近い解を得ることを可能とする。また、座屈荷重の重複を考慮し、最小座屈荷重の感度が連続関数となるよう問題設定を行い、また、座屈荷重重複時にも感度が正しく評価され、設定した問題の最適性条件を満たすことを確認して解を求める。本文中では、提案手法をアーチと格子シェルの問題に適用した場合の結果を示し、最適形状とその力学特性について論じている。

2.2 最適化の方法

2.2.1 最適化問題の設定

最適解で座屈荷重が重複しない場合の基本的な問題設定を行う。構造材の体積が一定の条件のもとで、座屈荷重が最大となる構造形状を求めるものとする。幾何学的非線形解析には有限要素法を使用し、直線材要素を用いてスペースフレームの問題を扱う。構造物の形状は要素節点座標で表され、問題は座屈荷重を最大とする節点座標を求める問題として扱われる。構造形状が座屈荷重に及ぼす影響について着目している為、ここでは部材断面は単純に一樣とする。この場合、構造材体積一定の条件は、要素長の総和が一定という条件に置き換えられ、問題は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \text{Objective Function} \quad & f(\mathbf{r}) = -\Lambda^C(\mathbf{r}) \quad \rightarrow \text{Minimize} \\ \text{Subject to} \quad & c(\mathbf{r}) = \sum_{e=1}^M l_e - L_0 = 0 \end{aligned} \quad (2-1)$$

ここに、 Λ^C は座屈荷重係数、 \mathbf{r} は節点位置ベクトル、 M は要素数、 l_e は要素長さ、 L_0 は指定した要素長総和である。節点位置ベクトル \mathbf{r} が設計変数となる。

部材の材料非線形性は考慮せず、弾性座屈を扱うものとする。すなわち、応力に関する制約は考慮せず、線形弾性体と仮定した構造物において座屈荷重の大きな構造形状を求めることを目的とする。

問題は制約つき非線形最適化問題となる。最適化手法として、非線形計画法である逐次二次計画法を採用する。問題(2-1)式のLagrange関数を次式のように定義する。

$$L(\mathbf{r}, \mu) = f(\mathbf{r}) + \mu c(\mathbf{r}) = -\Lambda^C + \mu \left(\sum_{e=1}^M l_e - L_0 \right) \quad (2-2)$$

上式を \mathbf{r}, μ で偏微分することによって、最適性必要条件式は次式のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mu)}{\partial r_{\alpha i}} - \frac{\partial \Lambda^C}{\partial r_{\alpha i}} + \mu \sum_{e=1}^M \frac{\partial l_e}{\partial r_{\alpha i}} &= 0, \quad (\alpha = x, y, z)(i = 1, \dots, N_r) \\ \frac{\partial L(\mathbf{r}, \mu)}{\partial \mu} = \sum_{e=1}^M l_e - L_0 &= 0 \end{aligned} \quad (2-3)$$

ここで、 μ はラグランジュ乗数を表す。

上に示した最適化問題の式表現は、節点座標空間を三次元に拡張した以外に前章との相違は無い。ただし、本章では上式の座屈荷重係数 Λ^C を釣合経路上の臨界点を求めることで得るのではなく、特定の変位量をもつ釣合点で固有値解析を行うことにより近似的に評価する。次節では、まず直線材要素による幾何学的非線形解析の定式化を示し、その後に座屈荷重の近似評価方法とその感度解析方法について示す。

2.2.2 直線材要素による幾何学的非線形解析

1章で採用した直線材要素を三次元空間へ拡張する。しかし、1章での扱いと同様に、変形後の要素節点を結ぶ直線方向とこれに直交する二方向に移動座標系を設定し、変位から剛体変形成分を完全に除去した場合、剛性行列の表現は大変煩雑となる。最適化を行う際には剛性行列の微分を必要とするため、このような厳密な定式化を避け、変位から剛体変形成分の一部を取り除く近似的な取り扱いを行っている。

2.2.2.1 移動座標系

初期状態からの外力及び変形の状態は、1つのパラメータ t で表現可能であるとする。部材 ij が外力を受け、 $t = t^*$ において $i'j'$ に変形したものとする (Fig. 2-1)。 $o-xyz$ は部材に設定した局所座標系である。座標系 $o-xyz$ における要素節点変位ベクトルを \mathbf{d} とし、節点変位ベクトル \mathbf{d} から、軸方向に対しては剛体変位成分を、回転角に対しては部材角を除去して定義される要素節点変位ベクトルを \mathbf{d}_e とし、次式で定義する。

$$\mathbf{d} = [u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ \theta_{zi} \ u_j \ v_j \ w_j \ \theta_{xj} \ \theta_{yj} \ \theta_{zj}]^T, \quad \mathbf{d}_e = [u_e \ \theta_{ex} \ \theta_{eyi} \ \theta_{ezi} \ \theta_{eyj} \ \theta_{ezj}]^T \quad (2-4)$$

幾何学的な関係から、これら2つの変位ベクトルには次の関係がある。

$$u_e = \sqrt{(u_j - u_i + l_e)^2 + (v_j - v_i)^2 + (w_j - w_i)^2} - l_e$$

$$\theta_{exi} = \theta_{xj} - \theta_{xi}, \theta_{eyi} = \theta_{yi} - R_y, \theta_{eyj} = \theta_{yj} - R_y, \theta_{ezi} = \theta_{zi} - R_z, \theta_{ezj} = \theta_{zj} - R_z \quad (2-5)$$

ここに、部材角 R_y, R_z は次式で表される。

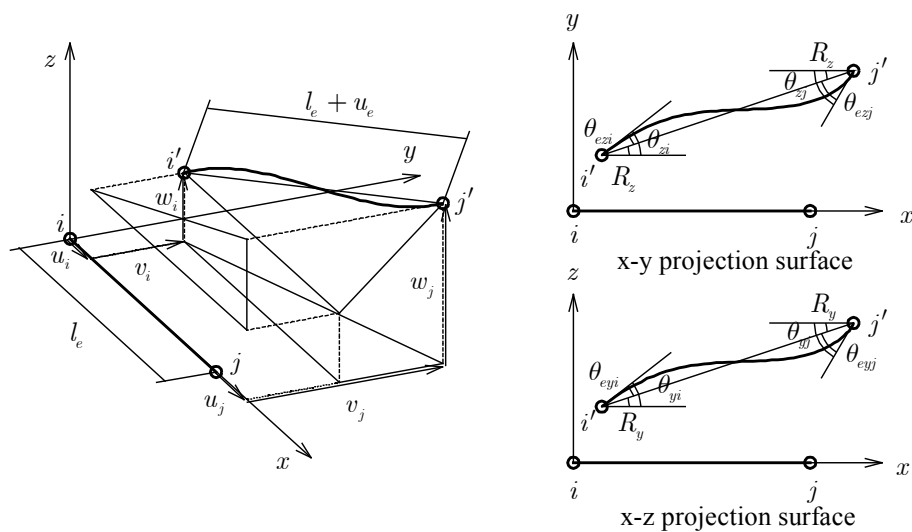


Fig. 2-1 直線材要素

$$R_y = -\tan^{-1}\left(\frac{w_j - w_i}{u_j - u_i + l_e}\right), R_z = +\tan^{-1}\left(\frac{v_j - v_i}{u_j - u_i + l_e}\right)$$

上式の表現では、 \mathbf{d}_e の各成分は $i'j'$ に沿った直交座標系ではなく不統一な座標系によって表現されているが、ここではこれを移動座標系と呼ぶこととする。(2-5)式は、パラメータ t によって変化する移動座標系における要素節点変位の座標変換を表す。(2-5)式を t で微分すると次式が得られる。

$$\begin{bmatrix} \dot{u}_e \\ \dot{\theta}_{ex} \\ \dot{\theta}_{ey} \\ \dot{\theta}_{ez} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{11} & -l_{12} & -l_{13} & 0 & 0 & 0 & +l_{11} & +l_{12} & +l_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ +\frac{l_{13}}{(l_1^2 + l_3^2)(l_e + u_e)} & 0 & -\frac{l_{11}}{(l_1^2 + l_3^2)(l_e + u_e)} & 0 & +1 & 0 & -\frac{l_{13}}{(l_1^2 + l_3^2)(l_e + u_e)} & 0 & +\frac{l_{11}}{(l_1^2 + l_3^2)(l_e + u_e)} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{l_{12}}{(l_1^2 + l_2^2)(l_e + u_e)} + \frac{l_{11}}{(l_1^2 + l_2^2)(l_e + u_e)} & 0 & 0 & 0 & +1 & +\frac{l_{12}}{(l_1^2 + l_2^2)(l_e + u_e)} & -\frac{l_{11}}{(l_1^2 + l_2^2)(l_e + u_e)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ +\frac{l_{13}}{(l_1^2 + l_3^2)(l_e + u_e)} & 0 & -\frac{l_{11}}{(l_1^2 + l_3^2)(l_e + u_e)} & 0 & 0 & 0 & -\frac{l_{13}}{(l_1^2 + l_3^2)(l_e + u_e)} & 0 & +\frac{l_{11}}{(l_1^2 + l_3^2)(l_e + u_e)} & 0 & +1 & 0 \\ -\frac{l_{12}}{(l_1^2 + l_2^2)(l_e + u_e)} + \frac{l_{11}}{(l_1^2 + l_2^2)(l_e + u_e)} & 0 & 0 & 0 & 0 & +\frac{l_{12}}{(l_1^2 + l_2^2)(l_e + u_e)} & -\frac{l_{11}}{(l_1^2 + l_2^2)(l_e + u_e)} & 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_i \\ \dot{v}_i \\ \dot{\theta}_{ix} \\ \dot{\theta}_{iy} \\ \dot{u}_j \\ \dot{v}_j \\ \dot{\theta}_{jx} \\ \dot{\theta}_{jy} \end{bmatrix}$$

ここに、 l_{11}, l_{12}, l_{13} は直線 $i'j'$ の局所座標系に対する方向余弦で、

$$l_{11} = \frac{u_j - u_i + l_e}{l_e + u_e}, l_{12} = \frac{v_j - v_i}{l_e + u_e}, l_{13} = \frac{w_j - w_i}{l_e + u_e}$$

上式を次のように表す。

$$\dot{\mathbf{d}}_e = \mathbf{T}_e \dot{\mathbf{d}} \quad (2-6)$$

ここに、 $(\dot{\quad})$ は t による微分を意味する。上式は節点変位増分ベクトルの座標変換を表す。

次に節点力の移動座標系への変換を定義する。座標系 $o-xyz$ で測った節点力ベクトルを \mathbf{f} 、移動座標系における節点力ベクトルを \mathbf{f}_e として、次式で定義する。

$$\mathbf{f} = [N_i \quad Q_{yi} \quad Q_{zi} \quad M_{xi} \quad M_{yi} \quad M_{zi} \quad N_j \quad Q_{yj} \quad Q_{zj} \quad M_{xj} \quad M_{yj} \quad M_{zj}]^T, \mathbf{f}_e = [N_e \quad M_{ex} \quad M_{eyi} \quad M_{ezi} \quad M_{eyj} \quad M_{ezj}]^T \quad (2-7)$$

(2-6)式の反傾関係から、次式が成立する。

$$\mathbf{f} = \mathbf{T}_e^T \mathbf{f}_e \quad (2-8)$$

上式は、節点力ベクトルの座標変換式を表す。上式を t で微分すると次式が得られる。

$$\dot{\mathbf{f}} = \mathbf{T}_e^T \dot{\mathbf{f}}_e + \dot{\mathbf{T}}_e^T \mathbf{f}_e \quad (2-9)$$

上式の右辺第2項を次のように表しておく。

$$\dot{\mathbf{T}}_e^T \mathbf{f}_e = \mathbf{k}_{G2} \dot{\mathbf{d}} \quad (2-10)$$

$$\mathbf{k}_{c2} = \begin{bmatrix} k11 & k12 & k13 & 0 & 0 & 0 & -k11 & -k12 & -k13 & 0 & 0 & 0 \\ & k22 & k23 & 0 & 0 & 0 & -k12 & -k22 & -k23 & 0 & 0 & 0 \\ & & k33 & 0 & 0 & 0 & -k13 & -k23 & -k33 & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & k11 & k12 & k13 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & k22 & k23 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & k33 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} k11 &= \frac{+1}{(l_e + u_e)} \left\{ (1 - l_{11}^2) N_e - \frac{2l_{11}l_{12}}{(l_{11}^2 + l_{12}^2)^2} Q_{ey} - \frac{2l_{11}l_{13}}{(l_{11}^2 + l_{13}^2)^2} Q_{ez} \right\} \\ k12 &= \frac{-1}{(l_e + u_e)} \left\{ l_{11}l_{12}N_e - \frac{(l_{11}^2 - l_{12}^2)}{(l_{11}^2 + l_{12}^2)^2} Q_{ey} \right\} \\ k13 &= \frac{-1}{(l_e + u_e)} \left\{ l_{11}l_{13}N_e - \frac{(l_{11}^2 - l_{13}^2)}{(l_{11}^2 + l_{13}^2)^2} Q_{ez} \right\} \\ k22 &= \frac{+1}{(l_e + u_e)} \left\{ (1 - l_{12}^2) N_e + \frac{2l_{11}l_{12}}{(l_{11}^2 + l_{12}^2)^2} Q_{ey} \right\} \\ k23 &= \frac{-1}{(l_e + u_e)} l_{12}l_{13}N_e \\ k33 &= \frac{+1}{(l_e + u_e)} \left\{ (1 - l_{13}^2) N_e + \frac{2l_{11}l_{13}}{(l_{11}^2 + l_{13}^2)^2} Q_{ez} \right\} \\ Q_{ey} &= \frac{M_{ezi} + M_{ezj}}{l_e + u_e}, Q_{ez} = -\frac{M_{eyi} + M_{eyj}}{l_e + u_e} \end{aligned}$$

2.2.2.2 釣合方程式

材軸上の任意位置における変位は、移動座標系による要素節点変位を用いて軸方向一次、法線方向三次の多項式によって近似し、次式で表す。

$$\begin{aligned} u &= \xi u_e \\ \theta &= \xi \theta_{ez} \\ v &= l(\xi^3 - 2\xi^2 + \xi)\theta_{ezi} + l(\xi^3 - \xi^2)\theta_{ezj} \\ w &= l(-\xi^3 + 2\xi^2 - \xi)\theta_{eyi} + l(-\xi^3 + \xi^2)\theta_{eyj} \end{aligned} \quad (2-11)$$

ここに、 $\xi = x/l_e$ である。

要素内任意点における軸方向ひずみ ε 及びせん断ひずみ γ_{xy}, γ_{xz} は次式により仮定する。

$$\varepsilon_x = \varepsilon_0 + y\kappa_y + z\kappa_z, \quad \gamma_{xy} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y} - z \right) \kappa_x, \quad \gamma_{xz} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} - y \right) \kappa_x \quad (2-12)$$

ここに、

$$\varepsilon_0 = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right\}, \quad \kappa_x = \frac{d\theta}{dx}, \quad \kappa_y = -\frac{d^2v}{dx^2}, \quad \kappa_z = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad (2-13)$$

であり Ψ はゆがみ関数である。

仮想ひずみは(2-13)式より、次式によって表される。

$$\delta\varepsilon_0 = \frac{d\delta u}{dx} + \frac{du}{dx} \frac{d\delta u}{dx} + \frac{dv}{dx} \frac{d\delta v}{dx} + \frac{dw}{dx} \frac{d\delta w}{dx}, \quad \delta\kappa_x = \frac{d\delta\theta}{dx}, \quad \delta\kappa_y = -\frac{d^2\delta v}{dx^2}, \quad \delta\kappa_z = -\frac{d^2\delta w}{dx^2} \quad (2-14)$$

部材の断面力とひずみの関係は、次式で表される。

$$N = EA\varepsilon_0, \quad M_x = GJ\kappa_x, \quad M_y = EI_y\kappa_y, \quad M_z = EI_z\kappa_z \quad (2-15)$$

仮想仕事の原理により次式が成立する。

$$\int_0^l (N\delta\varepsilon_0 + M_x\delta\kappa_x + M_y\delta\kappa_y + M_z\delta\kappa_z) dx - n_e\delta u_e - m_{ex}\delta\theta_{ex} - m_{eyi}\delta\theta_{eyi} - m_{eyj}\delta\theta_{eyj} - m_{ezj}\delta\theta_{ezj} - m_{ezj}\delta\theta_{ezj} = 0 \quad (2-16)$$

(2-11)~(2-15)式を上式に代入し、 $\delta\mathbf{d}_e$ が任意であることを考慮すると、次式のような移動座標系における非線形釣合方程式が得られる。

$$\mathbf{k}_{eS}(\mathbf{d}_e)\mathbf{d}_e - \mathbf{f}_e = \mathbf{0} \quad (2-17)$$

$$\mathbf{k}_{eS} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_e} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) \left(1 + \frac{u_e}{2l_e}\right) & 0 & \frac{EA}{60} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) (4\theta_{eyi} - \theta_{eyj}) & \frac{EA}{60} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) (4\theta_{ezj} - \theta_{ezj}) \\ \frac{GJ}{l_e} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4EI_y}{l_e} + \frac{EA}{15} u_e + \frac{EAl_e}{420} (12\theta_{eyi}^2 - 3\theta_{eyi}\theta_{eyj} + \theta_{eyj}^2) & \frac{EAl_e}{840} (24\theta_{eyi}\theta_{ezj} - 3\theta_{eyj}\theta_{ezj} - 3\theta_{eyi}\theta_{ezj} + 2\theta_{eyj}\theta_{ezj}) & \frac{4EI_z}{l_e} + \frac{EA}{15} u_e + \frac{EAl_e}{420} (12\theta_{ezj}^2 - 3\theta_{ezj}\theta_{ezj} + \theta_{ezj}^2) & \\ \text{Sym.} & & & \\ \frac{EA}{60} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) (-\theta_{eyi} + 4\theta_{eyj}) & \frac{EA}{60} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) (-\theta_{ezj} + 4\theta_{ezj}) & & \\ \frac{2EI_y}{l_e} - \frac{EA}{60} u_e + \frac{EAl_e}{840} (-3\theta_{eyi}^2 + 4\theta_{eyi}\theta_{eyj} - 3\theta_{eyj}^2) & \frac{EAl_e}{840} (-3\theta_{eyi}\theta_{ezj} + 2\theta_{eyj}\theta_{ezj} + 2\theta_{eyi}\theta_{ezj} - 3\theta_{eyj}\theta_{ezj}) & & \\ \frac{EAl_e}{840} (-3\theta_{eyi}\theta_{ezj} + 2\theta_{eyj}\theta_{ezj} + 2\theta_{eyi}\theta_{ezj} - 3\theta_{eyj}\theta_{ezj}) & \frac{2EI_z}{l_e} - \frac{EA}{60} u_e + \frac{EAl_e}{840} (-3\theta_{ezj}^2 + 4\theta_{ezj}\theta_{ezj} - 3\theta_{ezj}^2) & & \\ \frac{4EI_y}{l_e} + \frac{EA}{15} u_e + \frac{EAl_e}{420} (\theta_{eyi}^2 - 3\theta_{eyi}\theta_{eyj} + 12\theta_{eyj}^2) & \frac{EAl_e}{840} (2\theta_{eyi}\theta_{ezj} - 3\theta_{eyj}\theta_{ezj} - 3\theta_{eyi}\theta_{ezj} + 24\theta_{eyj}\theta_{ezj}) & & \\ & \frac{4EI_z}{l_e} + \frac{EA}{15} u_e + \frac{EAl_e}{420} (\theta_{ezj}^2 - 3\theta_{ezj}\theta_{ezj} + 12\theta_{ezj}^2) & & \end{bmatrix}$$

上式を t で微分することで、増分型の釣合方程式として次式が得られる。

$$\mathbf{k}_{eT}\dot{\mathbf{d}}_e - \dot{\mathbf{f}}_e = \mathbf{0}, \quad \mathbf{k}_{eT} = \mathbf{k}_{eA} + \mathbf{k}_{eG} \quad (2-18)$$

$$\mathbf{k}_{eA} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_c} \left(1 + \frac{u_c}{l_c}\right)^2 & 0 & \frac{EA}{30} \left(1 + \frac{u_c}{l_c}\right) (4\theta_{eyi} - \theta_{eyj}) & \frac{EA}{30} \left(1 + \frac{u_c}{l_c}\right) (4\theta_{ezi} - \theta_{ezj}) \\ \frac{GJ}{l_c} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{4EI_y}{l_c} + \frac{EAl_c}{210} (12\theta_{eyi}^2 - 3\theta_{eyi}\theta_{eyj} + \theta_{eyj}^2) & \frac{EAl_c}{420} (24\theta_{eyi}\theta_{ezi} - 3\theta_{eyj}\theta_{ezi} - 3\theta_{eyi}\theta_{ezj} + 2\theta_{eyj}\theta_{ezj}) & \frac{4EI_z}{l_c} + \frac{EAl_c}{210} (12\theta_{ezi}^2 - 3\theta_{ezi}\theta_{ezj} + \theta_{ezj}^2) & \\ \text{Sym.} & & & \\ & \frac{EA}{30} \left(1 + \frac{u_c}{l_c}\right) (-\theta_{eyi} + 4\theta_{eyj}) & \frac{EA}{30} \left(1 + \frac{u_c}{l_c}\right) (-\theta_{ezi} + 4\theta_{ezj}) & \\ & 0 & 0 & \\ & \frac{2EI_y}{l_c} + \frac{EAl_c}{420} (-3\theta_{eyi}^2 + 4\theta_{eyi}\theta_{eyj} - 3\theta_{eyj}^2) & \frac{EAl_c}{420} (-3\theta_{eyi}\theta_{ezi} + 2\theta_{eyj}\theta_{ezi} + 2\theta_{eyi}\theta_{ezj} - 3\theta_{eyj}\theta_{ezj}) & \\ & \frac{EAl_c}{420} (-3\theta_{eyi}\theta_{ezi} + 2\theta_{eyj}\theta_{ezi} + 2\theta_{eyi}\theta_{ezj} - 3\theta_{eyj}\theta_{ezj}) & \frac{2EI_z}{l_c} + \frac{EAl_c}{420} (-3\theta_{ezi}^2 + 4\theta_{ezi}\theta_{ezj} - 3\theta_{ezj}^2) & \\ & \frac{4EI_y}{l_c} + \frac{EAl_c}{210} (\theta_{eyi}^2 - 3\theta_{eyi}\theta_{eyj} + 12\theta_{eyj}^2) & \frac{EAl_c}{420} (2\theta_{eyi}\theta_{ezi} - 3\theta_{eyj}\theta_{ezi} - 3\theta_{eyi}\theta_{ezj} + 24\theta_{eyj}\theta_{ezj}) & \\ & & \frac{4EI_z}{l_c} + \frac{EAl_c}{420} (\theta_{ezi}^2 - 3\theta_{ezi}\theta_{ezj} + 12\theta_{ezj}^2) & \\ & \left[\begin{array}{cccccc} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & b & 0 & c & 0 \\ & & & b & 0 & c \\ \text{Sym.} & & & & d & 0 \\ & & & & & d \end{array} \right] \\ \\ a = \frac{EAu_c(2l_c + u_c)}{2l_c^3} + \frac{EA}{30l_c} (2\theta_{eyi}^2 - \theta_{eyi}\theta_{eyj} + 2\theta_{eyj}^2 + 2\theta_{ezi}^2 - \theta_{ezi}\theta_{ezj} + 2\theta_{ezj}^2) \\ b = \frac{EAu_c(2l_c + u_c)}{15l_c} + \frac{EAl_c}{420} (12\theta_{eyi}^2 - 3\theta_{eyi}\theta_{eyj} + \theta_{eyj}^2 + 12\theta_{ezi}^2 - 3\theta_{ezi}\theta_{ezj} + \theta_{ezj}^2) \\ c = -\frac{EAu_c(2l_c + u_c)}{60l_c} - \frac{EAl_c}{840} (3\theta_{eyi}^2 - 4\theta_{eyi}\theta_{eyj} + 3\theta_{eyj}^2 + 3\theta_{ezi}^2 - 4\theta_{ezi}\theta_{ezj} + 3\theta_{ezj}^2) \\ d = \frac{EAu_c(2l_c + u_c)}{15l_c} + \frac{EAl_c}{420} (\theta_{eyi}^2 - 3\theta_{eyi}\theta_{eyj} + 12\theta_{eyj}^2 + \theta_{ezi}^2 - 3\theta_{ezi}\theta_{ezj} + 12\theta_{ezj}^2)
\end{bmatrix}$$

ここに、 \mathbf{k}_{eT} , \mathbf{k}_{eA} , \mathbf{k}_{eG} はそれぞれ移動座標系における、接線剛性行列、線形剛性行列+大変位行列、幾何剛性行列を表す。

移動座標系から全体座標系への変換することで、最終的に次の釣合方程式、及び増分型の釣合方程式が得られる。

$$\bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \mathbf{f}, \quad \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{T}^T \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_{eS} \mathbf{H} (\mathbf{T} \bar{\mathbf{d}}) \quad (2-19)$$

$$\bar{\mathbf{k}}_T \dot{\bar{\mathbf{d}}} - \dot{\bar{\mathbf{f}}} = \mathbf{0}, \quad \bar{\mathbf{k}}_T = \mathbf{T}^T (\mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_{eT} \mathbf{T}_e^T + \mathbf{k}_{G2}) \mathbf{T} \quad (2-20)$$

2.2.3 座屈前変形を考慮した近似座屈荷重係数および感度

最適解で座屈荷重が重複する問題に対し厳密に非線形座屈荷重を最大化するには、釣合経路上の複数の臨界点を求め、これらの臨界点が極限点型か分岐点型か判別した上で感度を評価しなければなら

ず煩雑な手順を要する。また、最適化時においてそれまで釣合経路上に存在していた臨界点が形状修正に伴って消失する場合などもあり（例えば最小座屈が分岐点、2番目の座屈が極限点であったとする。形状修正によって分岐点型の座屈荷重が上昇し、最小座屈が極限点に変化した場合、釣合経路上の分岐点はもはやその付近には存在しないか、極限点を越えた後の不安定な釣合経路上に現れる。）、非線形計画法を用いた最適化では解を求めることは困難となる。線形座屈問題として座屈荷重を評価すれば、全ての座屈荷重は固有値解析により得られ、感度は同一の式で評価可能であるため、座屈荷重の重複を考慮するには比較的扱いやすい。ただし、変位の影響が大きい場合には座屈荷重の算定誤差は大きくなる。前章では、座屈荷重の大きなアーチ形状として曲げ変形を受けやすい形状も得られており、座屈前変形の影響を無視するのは好ましくない。

以下では、このような最適化解析上の問題を回避し、かつ座屈荷重の評価に対して十分な精度を持たせる方法として、座屈前変形を近似的に考慮した座屈荷重係数の評価法とその感度解析手法について示す。

任意の平衡点における釣合式及び増分型の釣合式を次式で表す。

$$\mathbf{Q}(\mathbf{D}) - \Lambda \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (2-21)$$

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{D})\dot{\mathbf{D}} - \dot{\Lambda} \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (2-22)$$

\mathbf{Q} は系全体での内力ベクトル、 \mathbf{F} は外力モード、 \mathbf{D} は変位ベクトル、 Λ は荷重係数を表す。 \mathbf{K}_T は接線剛性行列である。非線形座屈荷重係数は(2-21)式の釣合式を満たし、(2-22)式の接線剛性行列の固有値が零となる点での荷重係数である。

変位ベクトルノルムを一定量 R_{norm} とする平衡点 R を求め、接線剛性を評価する (Fig. 2-2)。平衡点 R では次式が成り立つ。

$$\mathbf{Q}(\mathbf{D}^R) - \Lambda^R \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (2-23)$$

$$\mathbf{D}^{RT} \mathbf{D}^R = R_{norm}^2 \quad (2-24)$$

ここに、上添え字 R は平衡点 R での値であることを意味する。

接線剛性行列は、荷重変位零点から平衡点 R までの割合で荷重係数に比例するものとして線形近似する。接線剛性は荷重係数の一次関数として次式で表せる。

$$\mathbf{K}_T(\Lambda) \simeq \mathbf{K}_T^O + \frac{\Lambda}{\Lambda^R} (\mathbf{K}_T^R - \mathbf{K}_T^O) \quad (2-25)$$

ここに、 \mathbf{K}_T^O は荷重変位零点での接線剛性行列を表す。

上式で定義した接線剛性行列の固有値が零となる時の荷重係数を座屈荷重係数として評価する。座屈荷重係数 Λ_i^C は次に示す(2-27)式固有値問題の固有値 λ_i を用いて(2-26)式のように表せる。

$$\Lambda_i^C \simeq \lambda_i \Lambda^R \quad (2-26)$$

$$\left[\mathbf{K}_T^O + \lambda_i (\mathbf{K}_T^R - \mathbf{K}_T^O) \right] \phi_i = \mathbf{0} \quad (2-27)$$

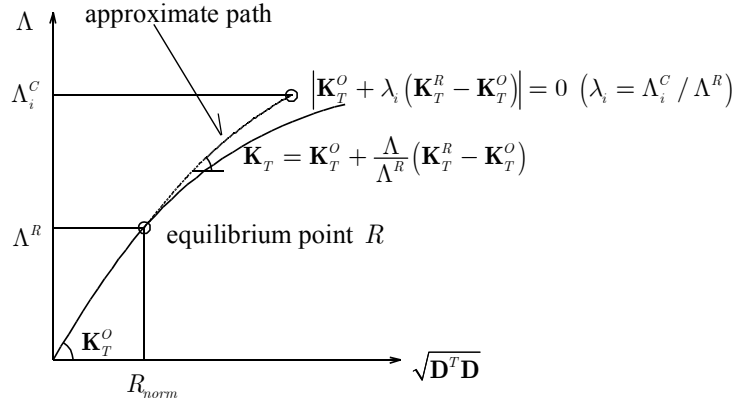


Fig.2-2 近似座屈荷重係数

ここに ϕ_i は固有ベクトルを表す。

次に、(2-26)式で表される座屈荷重係数の感度を求める。(2-26)式を設計変数ベクトル \mathbf{r} の任意の成分 r_{α_j} で偏微分すると次式となる。

$$\frac{\partial \Lambda_i^C}{\partial r_{\alpha_j}} = \frac{\partial \lambda_i}{\partial r_{\alpha_j}} \Lambda^R + \lambda_i \frac{\partial \Lambda^R}{\partial r_{\alpha_j}} \quad (2-28)$$

上式中の $\partial \Lambda^R / \partial r_{\alpha_j}$ を求める。(2-23),(2-24)式を r_{α_j} で偏微分すると次式を得る。ただし、ここでは外力ベクトルは設計変数 \mathbf{r} に無関係としている。

$$\frac{\partial \mathbf{Q}^R}{\partial r_{\alpha_j}} + \mathbf{K}_T^R \frac{\partial \mathbf{D}^R}{\partial r_{\alpha_j}} - \frac{\partial \Lambda^R}{\partial r_{\alpha_j}} \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (2-29)$$

$$\mathbf{D}^{RT} \frac{\partial \mathbf{D}^R}{\partial r_{\alpha_j}} = 0 \quad (2-30)$$

(2-29)式の左から $\mathbf{D}^{RT} \mathbf{K}_T^{R-1}$ を乗じて(2-30)式を考慮することで、次式が得られる。

$$\frac{\partial \Lambda^R}{\partial r_j} = \left(\mathbf{D}^{RT} \mathbf{K}_T^{R-1} \frac{\partial \mathbf{Q}^R}{\partial r_j} \right) / \mathbf{D}^{RT} \mathbf{K}_T^{R-1} \mathbf{F} \quad (2-31)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}^R}{\partial r_j} = -\mathbf{K}_T^{R-1} \frac{\partial \mathbf{Q}^R}{\partial r_j} + \frac{\partial \Lambda^R}{\partial r_j} \mathbf{K}_T^{R-1} \mathbf{F} \quad (2-32)$$

以上で、平衡点 R の荷重係数及び変位の感度が求められた。上式は(2-24)式の拘束条件下における平衡点の節点座標による勾配であり、形状の変化による平衡点 R の変動を評価できる。

次に $\lambda_{i,r}$ を求める。(2-27)式を r_{α_j} で偏微分すると次式を得る。

$$\left[\frac{\partial \mathbf{K}_T^O}{\partial r_{\alpha_j}} + \frac{\partial \lambda_i}{\partial r_{\alpha_j}} (\mathbf{K}_T^R - \mathbf{K}_T^O) + \lambda_i \left(\frac{\partial \mathbf{K}_T^R}{\partial r_{\alpha_j}} + \frac{\partial \mathbf{K}_T^R}{\partial D_k} \frac{\partial D_k^R}{\partial r_{\alpha_j}} - \frac{\partial \mathbf{K}_T^O}{\partial r_{\alpha_j}} - \frac{\partial \mathbf{K}_T^O}{\partial D_k} \frac{\partial D_k^R}{\partial r_{\alpha_j}} \right) \right] \phi_i + \left[\mathbf{K}_T^O + \lambda_i (\mathbf{K}_T^R - \mathbf{K}_T^O) \right] \frac{\partial \phi_i}{\partial r_{\alpha_j}} = \mathbf{0} \quad (2-33)$$

ここで、上式の表現には総和規約が適用されており、 D_k は変位ベクトル \mathbf{D} の第 k 成分を表す。

(2-33)式の左から ϕ_i^T を乗じ、 $\mathbf{K}_T^O, \mathbf{K}_T^R$ が対称行列であることと(2-27)式を考慮すれば、次式が得られる。

$$\phi_i^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}_T^O}{\partial r_{\alpha j}} + \frac{\partial \lambda_i}{\partial r_{\alpha j}} (\mathbf{K}_T^R - \mathbf{K}_T^O) + \lambda_i \left(\frac{\partial \mathbf{K}_T^R}{\partial r_{\alpha j}} + \frac{\partial \mathbf{K}_T^R}{\partial D_k} \frac{\partial D_k^R}{\partial r_{\alpha j}} - \frac{\partial \mathbf{K}_T^O}{\partial r_{\alpha j}} - \frac{\partial \mathbf{K}_T^O}{\partial D_k} \frac{\partial D_k^R}{\partial r_{\alpha j}} \right) \right] \phi_i = 0 \quad (2-34)$$

これを整理すると次の固有値感度が得られる。

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial r_{\alpha j}} = -\phi_i^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}_T^O}{\partial r_{\alpha j}} + \lambda_i \left(\frac{\partial \mathbf{K}_T^R}{\partial r_{\alpha j}} + \frac{\partial \mathbf{K}_T^R}{\partial D_k} \frac{\partial D_k^R}{\partial r_{\alpha j}} - \frac{\partial \mathbf{K}_T^O}{\partial r_{\alpha j}} - \frac{\partial \mathbf{K}_T^O}{\partial D_k} \frac{\partial D_k^R}{\partial r_{\alpha j}} \right) \right] \phi_i / \phi_i^T (\mathbf{K}_T^R - \mathbf{K}_T^O) \phi_i \quad (2-35)$$

上式中の $\partial D_k^R / \partial r_{\alpha j}$ は(2-32)式により与えられる。

以上、(2-28),(2-31),(2-32),(2-35)式を用いることで(2-24)式の条件のもと(2-26),(2-27)式で近似された座屈荷重係数の感度を評価できる。(2-35)式中には接線剛性行列の節点座標による微分マトリクス、及び変位による微分マトリクスを含む。これらの導出方法は1章(付録D)と同じであり、定式そのものも非常に共通する部分が多いので、マトリクスの詳細な内容については省略する。

2.2.4 座屈荷重係数の重複を考慮した最適化方法

2.2.4.1 目的関数及び制約条件

ここでは座屈荷重係数を(2-27)式の固有値によって評価している。固有値が最適解で重複する問題を改めて定義する。2つの固有値が最適解で重複する場合の概念図をFig.2-3-aに表す。図に示すように、ある固有モードの固有値を上昇させると、ある固有モードの固有値が下降し、最適解では複数の固有値が重複する。このような問題では、最小座屈荷重の感度は連続関数とならない為、非線形計画法を用いて解を求める上で工夫が必要となる。

初期形状を解析して得られる固有値を λ_i^0 ($\lambda_1^0 \leq \lambda_2^0 \leq \dots \leq \lambda_{N_d}^0$) (N_d :変位ベクトルの自由度)と表し、これら固有値の下添え字番号に対応する固有モードを ϕ_i^0 と表す。最適化過程で修正が行われた構造形状における固有値及び固有モードを λ_i, ϕ_i と表し、添え字番号を固有値の小さい順ではなく、固有値が設計変数に対して連続性を保つように番号を付ける (Fig.2-3-b)。固有モードは設計変数の陰関数であるが、設計変数の変化による変動は比較的小さいことが予測できる。そこで、次式のように固有値解析により得られた任意の固有モード ϕ_i^* を初期形状の固有モードを用いて展開し、係数 α_{ij} の大きさを

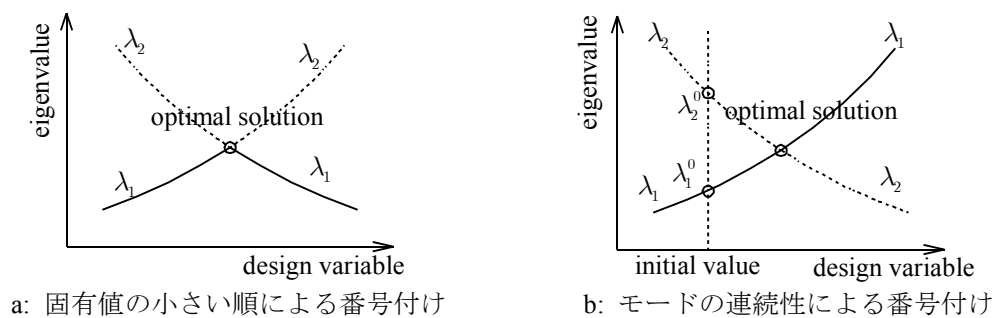


Fig. 2-3 固有値最適化の概念図

ら判断して、固有値及び固有ベクトルに番号を付けることとした。

$$\phi_i^* = \alpha_{i1}\phi_1^0 + \alpha_{i2}\phi_2^0 + \dots + \alpha_{iN_d}\phi_{N_d}^0 \quad (2-36)$$

$$\lambda_j = \lambda_i^*, \quad \phi_j = \phi_i^* \quad \{j | \alpha_{ij} = \max(\alpha_{i1}, \dots, \alpha_{iN_d})\} \quad (2-37)$$

問題を、初期形状の(2-27)式の最小固有値に対応する座屈荷重係数（すなわち $\lambda_1 \Lambda^R$ ）を最大化することとし、制約条件として初期形状の高次モードに対応する固有値 λ_i ($i = 2, \dots, N_d$) が λ_1 を下回らないものとする。問題は次のように表現できる。

$$\begin{aligned} \text{Objective Function} \quad & f(\mathbf{r}) = -\lambda_1 \Lambda^R \quad \rightarrow \quad \text{Minimize} \\ \text{Subject to} \quad & c_1(\mathbf{r}) = \sum_{e=1}^M l_e - L_0 = 0 \\ & c_i(\mathbf{r}) = \lambda_1 - \lambda_i \leq 0 \quad (i = 2, \dots, N_d) \end{aligned} \quad (2-38)$$

2.2.4.2 最適性必要条件

(2-38)式の問題は、不等式制約を含んでいる。これら不等式制約に対しスラック変数を導入することで等式制約に置き換え、問題(2-38)式のLagrange関数を次式のように表す。

$$L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\eta}) = f(\mathbf{r}) + \mu_1 c_1(\mathbf{r}) + \sum_{i=2}^{N_d} \mu_i (c_i(\mathbf{r}) + \eta_i^2) \quad (2-39)$$

ここに、 $\boldsymbol{\mu} = [\mu_1, \dots, \mu_{N_d}]^T$ はLagrange乗数を、 $\boldsymbol{\eta} = [\eta_2, \dots, \eta_{N_d}]^T$ はスラック変数を表す。

上式を $\mathbf{r}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\eta}$ で偏微分することで、次の停留条件式を得る。

$$\frac{\partial L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\eta})}{\partial r_{\alpha j}} = \frac{\partial f}{\partial r_{\alpha j}} + \sum_{i=1}^{N_d} \mu_i \frac{\partial c_i}{\partial r_{\alpha j}} = 0 \quad (\alpha = x, y, z)(j = 1, \dots, N_r) \quad (2-40)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\eta})}{\partial \mu_1} = c_1 = 0 \quad (2-41)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\eta})}{\partial \mu_i} = c_i + \eta_i^2 = 0 \quad (i = 1, \dots, N_d) \quad (2-42)$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{r}, \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\eta})}{\partial \eta_i} = 2\mu_i \eta_i = 0 \quad (i = 1, \dots, N_d) \quad (2-43)$$

(2-43)式は、 μ_i または η_i が0であることを意味する。 η_i が0である場合、(2-42)式により c_i も0となる。従って、(2-43)式を次式のように置き換えても数学的に等価である。

$$\mu_i c_i = 0 \quad (2-44)$$

従って、(2-40)~(2-43)式から η_i を消去して表現することで、最適性必要条件是次式のように表される。

$$\frac{\partial f}{\partial r_{\alpha j}} + \sum_{i=1}^{N_d} \mu_i \frac{\partial c_i}{\partial r_{\alpha j}} \quad (\alpha = x, y, z)(j = 1, \dots, N_r) \quad (2-45)$$

$$c_1 = 0 \quad (2-46)$$

$$c_i \leq 0, \quad \mu_i \geq 0, \quad c_i \mu_i = 0 \quad (i = 1, \dots, N_d) \quad (2-47)$$

上式を具体的に表現すれば、

$$-\left(\frac{\partial \lambda_1}{\partial r_{\alpha_j}} \Lambda^R + \lambda_1 \frac{\partial \Lambda^R}{\partial r_{\alpha_j}}\right) + \mu_1 \sum_{e=1}^M \frac{\partial l_e}{\partial r_{\alpha_j}} + \sum_{i=2}^{N_d} \mu_i \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial r_{\alpha_j}} - \frac{\partial \lambda_1}{\partial r_{\alpha_j}} \right) = 0 \quad (\alpha = x, y, z) (j = 1, \dots, N_r) \quad (2-48)$$

$$\sum_{e=1}^M l_e - L_0 = 0 \quad (2-49)$$

$$\lambda_1 - \lambda_i \leq 0, \quad \mu_i \geq 0, \quad \mu_i (\lambda_1 - \lambda_i) = 0 \quad (i = 1, \dots, N_d) \quad (2-50)$$

本問題は、上式を満たす $\mathbf{r}, \boldsymbol{\mu}$ を見つける問題である。

最適化方法には逐次二次計画法を採用する。ただし不等式制約条件を含むため、第1部1.5節で示した方法はそのまま適用されない。本章では、不等式制約を含んだ部分二次計画問題の解法に双対法²²⁾を適用する。なお、不等式制約条件の多くはアクティブ ($c_i = 0$) とはならないため、変位の全自由度に対して考慮する必要はない。計算時間の短縮と、(2-36)式で表されるモード判別の精度を上げるために、実際の解析では小さいほうから6つの固有値に対して不等式制約を考慮することとする。

2.2.4.3 重複固有値の感度係数について

固有値が重複する場合、固有ベクトルは実際には一意には決めることができず、このため、(2-35)式のような感度係数では正確に評価できない場合があることが指摘されている。本章で扱う問題では、以下に示す方法によって、(2-35)式によって感度係数が評価可能であることの確認を行っている。

固有値が重複した場合の感度係数について示す。固有値が N_e 個重複するものとする、次式のように固有ベクトルは独立な N_e 個のベクトルの線形結合で任意の方向に定めることができる。

$$\phi_i = \alpha_{i1} \bar{\phi}_1 + \alpha_{i2} \bar{\phi}_2 + \dots + \alpha_{iN_e} \bar{\phi}_{N_e} \quad (2-51)$$

上式をマトリクス表記して次式のように表す。

$$\phi_i = \bar{\Phi} \boldsymbol{\alpha}_i \quad (2-52)$$

(2-52)式を(2-35)式に代入すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial r_{\alpha_j}} = -\boldsymbol{\alpha}_i^T \bar{\Phi}^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}_T^O}{\partial r_{\alpha_j}} + \lambda_i \left(\frac{\partial \mathbf{K}_T^R}{\partial r_{\alpha_j}} + \frac{\partial \mathbf{K}_T^R}{\partial D_k} \frac{\partial D_k^R}{\partial r_{\alpha_j}} - \frac{\partial \mathbf{K}_T^O}{\partial r_{\alpha_j}} - \frac{\partial \mathbf{K}_T^O}{\partial D_k} \frac{\partial D_k^R}{\partial r_{\alpha_j}} \right) \right] \bar{\Phi} \boldsymbol{\alpha}_i / \boldsymbol{\alpha}_i^T \bar{\Phi}^T (\mathbf{K}_T^R - \mathbf{K}_T^O) \bar{\Phi} \boldsymbol{\alpha}_i \quad (2-53)$$

ここで、

$$\mathbf{A} = \bar{\Phi}^T \left[\frac{\partial \mathbf{K}_T^O}{\partial r_{\alpha_j}} + \lambda_i \left(\frac{\partial \mathbf{K}_T^R}{\partial r_{\alpha_j}} + \frac{\partial \mathbf{K}_T^R}{\partial D_k} \frac{\partial D_k^R}{\partial r_{\alpha_j}} - \frac{\partial \mathbf{K}_T^O}{\partial r_{\alpha_j}} - \frac{\partial \mathbf{K}_T^O}{\partial D_k} \frac{\partial D_k^R}{\partial r_{\alpha_j}} \right) \right] \bar{\Phi} \quad (2-54)$$

$$\mathbf{B} = \bar{\Phi}^T (\mathbf{K}_T^R - \mathbf{K}_T^O) \bar{\Phi} \quad (2-55)$$

とおけば、(2-53)式は次式のような固有値問題の形式となっている。

$$\left(\mathbf{A} + \frac{\partial \lambda_i}{\partial r_{\alpha_j}} \mathbf{B} \right) \boldsymbol{\alpha}_i = \mathbf{0} \quad (2-56)$$

上式が、固有値が重複した場合の感度係数の評価式であり、この固有値問題を解くことで感度を評

価することができる。ただし、上式は一変数 r_{ij} に対する感度係数であり、複数の節点座標が同時に変動した時の応答予測に用いることはできない（次章3.3.1節参照）。

$\bar{\phi}_i$ は $\mathbf{B}=\mathbf{I}$ となるように正規化されているものとする。もし、 \mathbf{A} の対角以外の項が対角項に比べ十分小さい場合、 \mathbf{A} の対角項はそのまま固有値の感度となり、この感度は(2-35)式と一致する。本章で扱う問題では、最適化の計算過程で \mathbf{A} の対角以外の項の値が、最適解近傍において特に大きくなることは無く、(2-35)式で感度が十分評価可能であることを確認している。

なお、次章では構造物の対称性を利用して重複固有値の形式を分類し、感度の評価方法について詳細に検討を行っている。本章で扱う問題の重複固有値の感度が、(2-35)式で評価可能である理由については、そこで明らかにする。

2.3 数値解析

2.3.1 アーチの数値解析

1章で扱った対称アーチの問題をとりあげ、2.2.3節で示した提案手法の有効性を示す。前章で示したように、この問題では最適解で座屈荷重の重複は起きないため、釣合経路上の臨界点を求め、感度を評価して厳密に非線形座屈荷重を最大化することが可能である。よって、問題設定を2.2.1節で示したものとし、比較の対象として非線形座屈荷重を目的関数とした場合と、線形座屈荷重を目的関数とした場合についてもそれぞれ定式化を行い解析している。

初期形状はライズ3m、スパン36mの山形フレーム（最適化後にアーチとなる）とし、要素分割は節点がx座標に等間隔となるように30分割する（Fig.2-4）。設計変数は節点y座標のみとし、対称性を考慮し15変数とする。制約条件であるアーチ長さは初期形状と同じ長さを指定する。

剛性の評価点を指定するパラメータ R_{norm} ((2-24)式) を、境界ピン支持のとき $R_{norm}=0.1(\text{m})$ 、固定支持のとき $R_{norm}=0.3(\text{m})$ としてそれぞれ解析を行った。ピン支持による最終形状の節点座標を●記号でFig.2-5-aに示し、固定支持による最終形状を同様に●記号でFig.2-5-bに示す。これらの図中に比較のため非線形座屈荷重を最大化した場合の形状を▲記号で、線形座屈荷重を最大化した場合の形状を■記

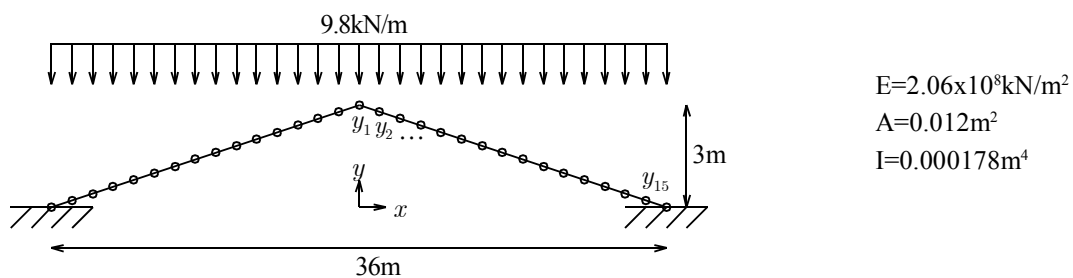


Fig.2-4 初期形状

号で示す。3つの解析方法により得られた最終形状は、ピン支持では皆ほぼ同じ形状を示し、固定支持では線形座屈荷重による結果が他の2つと大きく異なっている。

本手法による近似座屈荷重係数の精度を確認するため、最終形状に対して改めて幾何学的非線形解析を行い非線形座屈荷重との比較を行った。解析により得られた頂部節点の鉛直変位と荷重係数の関係をFig.2-6に示す。図中、実線で描かれたものが提案する手法による最終形状の釣合経路であり、経路上の●記号は臨界点を表している。また、水平の実線は(2-26)式で評価された近似座屈荷重係数を表している。即ち、水平の実線の縦軸の値が最適化の際に評価されている座屈荷重係数であり、●の縦軸の値が、実際の座屈荷重係数を表す。両者の値は比較的良く一致していることが確認できる。同様に、一点鎖線の釣合経路は、線形座屈荷重における最終形状のものであり、■記号は臨界点を表す。水平の一点鎖線は線形座屈荷重係数を表している。線形座屈荷重係数と実際の座屈荷重係数は、ピン支持の場合は良く一致しているが、固定支持の場合では、臨界点は極限点となっており両者は大きく異なった値を示している。図中の破線は、非線形座屈荷重最大化による最終形状の釣合経路を表す。

境界をピン支持とした場合、任意の形状に対して座屈前変形が比較的小さく、線形固有値解析を用いても座屈荷重は精度よく評価できる。このため、本手法、非線形座屈荷重、線形座屈荷重のいずれの場合も、最終形状に大きな差は無く(Fig.2-5-a)、座屈荷重係数も殆ど同じである(Fig.2-6-a)。一方、境界を固定とした場合、線形固有値解析を用いて最大化を行うと、座屈前変形の影響の大きい形状が探索空間に含まれ、座屈荷重が実際の値よりも大きく評価される。線形座屈最大化による最終形状の非

Table 2-1 最適化の結果

	Pinned Support			Fixed Support		
	present $R_{norm}=0.1$	nonlinear buckling	linear buckling	present $R_{norm}=0.3$	nonlinear buckling	linear buckling
y_1	2.6097	2.6616	2.7154	2.5923	2.6847	2.4412
y_2	2.5965	2.6486	2.7002	2.5803	2.6651	2.3962
y_3	2.5576	2.6097	2.6546	2.5442	2.6066	2.2652
y_4	2.4941	2.5450	2.5793	2.4827	2.5101	2.0599
y_5	2.4081	2.4548	2.4755	2.3939	2.3764	1.7968
y_6	2.3019	2.3394	2.3444	2.2753	2.2057	1.4956
y_7	2.1769	2.1990	2.1877	2.1253	1.9988	1.1777
y_8	2.0333	2.0341	2.0071	1.9435	1.7576	0.8651
y_9	1.8688	1.8452	1.8046	1.7288	1.4875	0.5804
y_{10}	1.6801	1.6333	1.5825	1.4791	1.1982	0.3435
y_{11}	1.4641	1.3996	1.3434	1.1922	0.9045	0.1679
y_{12}	1.2191	1.1460	1.0900	0.8741	0.6246	0.0569
y_{13}	0.9457	0.8753	0.8256	0.5503	0.3771	0.0026
y_{14}	0.6471	0.5910	0.5536	0.2665	0.1793	-0.0116
y_{15}	0.3288	0.2976	0.2773	0.0712	0.0478	-0.0058
Λ_{app}^C	1.74	-	1.77	4.08	-	4.81
Λ_{NL}^C	1.73	1.74	1.73	4.17	4.48	2.75

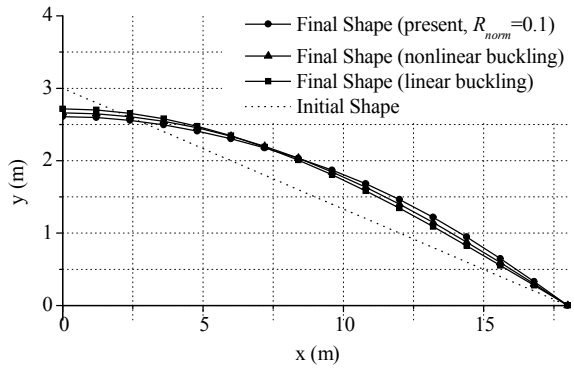


Fig.2-5-a アーチ形状 (ピン支持)

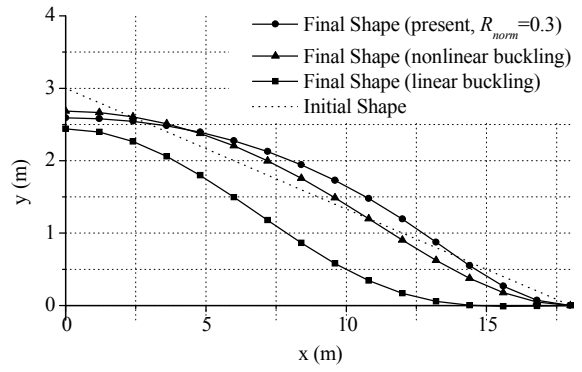


Fig.2-5-b アーチ形状 (固定支持)

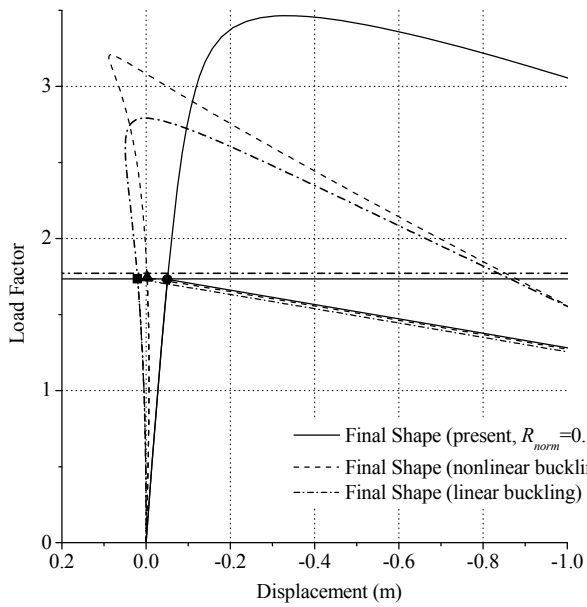


Fig.2-6-a 釣合曲線 (ピン支持)

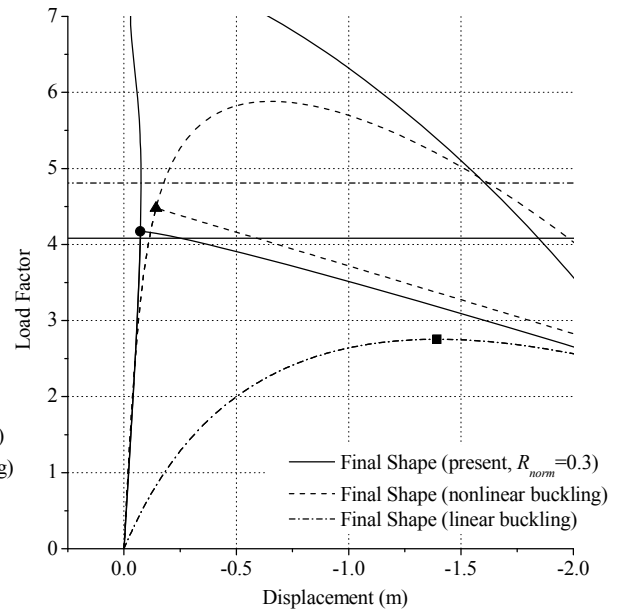


Fig.2-6-b 釣合曲線 (固定支持)

線形座屈荷重は実際には線形座屈荷重の5割程度しかなく、また、他の形状では分岐型の座屈であるのに対し、線形座屈による結果は極限点型の座屈を示している(Fig.2-6-b)。これに対し本手法による結果は非線形座屈荷重によるものと、形状、座屈荷重ともに比較的近い結果が得られていることがわかる。

3つの解析方法により得られた最終形状の節点座標と座屈荷重係数の値をTable 2-1に示した。表中の Λ_{app}^C と示した欄には、提案手法の最終形状に対しては(2-26)式で評価された近似座屈荷重係数を、線形座屈最大化による最終形状に対しては線形座屈荷重係数を記入してある。 Λ_{NL}^C は釣合経路解析によって得られた非線形座屈荷重の値を示す。

次に、パラメータ R_{norm} の違いが最終形状に与える影響について示す。 R_{norm} の値を変化させて得られた各最終形状をFig. 2-7に示す。 R_{norm} の値により最終形状に違いを生じているが、その差は比較的小さいことがわかる。同図中には、非線形座屈荷重最大化による最終形状を点線で示している。結果を見る限りでは、 R_{norm} の値に関わらず最終形状と厳密な最適解の間にはまだ幾らかの差が存在する。これは最適化の目的関数を(2-26)式で表される近似座屈荷重としており、あくまで近似座屈荷重の大きい形状を求めていることによる。

各最終形状の近似座屈荷重係数及び非線形座屈荷重係数の値をTable 2-2に示す。また、同表中の λ_1 は(2-27)式の固有値を表しており、この値が1.0に近いほど近似座屈荷重は実際の座屈荷重に近づき、臨界点近傍の平衡点で接線剛性を評価していることとなる。

最適化の際には R_{norm} の大きさは試行錯誤で決めざるを得ないが、 λ_1 の値が1.0に近ければ、座屈荷重を過大評価した不適切な解は得られないものと考えられる。従って、次節の解析ではこれを基準に R_{norm} の大きさを定めることとする。

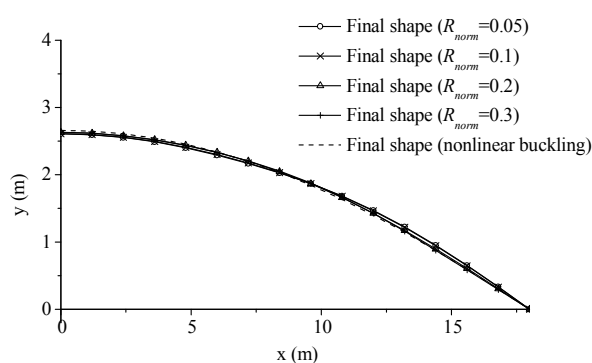


Fig.2-7-a 最終形状の比較 (ピン支持)

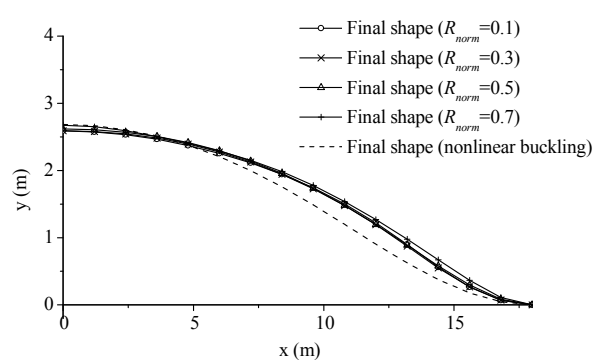


Fig.2-7-b 最終形状の比較 (固定支持)

Table 2-2-a 最終形状の座屈荷重係数 (ピン支持)

R_{norm}	λ_1	Λ_{app}^C	Λ_{NL}^C
0.05	3.65	1.74	1.73
0.1	1.79	1.74	1.73
0.2	0.90	1.75	1.74
0.3	0.73	1.84	1.74

Table 2-2-b 最終形状の座屈荷重係数 (固定支持)

R_{norm}	λ_1	Λ_{app}^C	Λ_{NL}^C
0.1	4.11	4.05	4.11
0.3	1.51	4.08	4.17
0.5	1.03	4.18	4.20
0.7	0.81	4.40	4.10

2.3.2 格子シェルの数値解析

2.3.2.1 解析モデル及び解析結果

解析モデルは2方向格子シェル(Fig.2-8)とする。スペースフレームの座屈現象は全体座屈のほか、個材座屈、局部座屈など様々な座屈挙動を示すが、このモデルでは全体座屈が卓越することがわかっている。スパンは36m×36mとし、節点はx,y方向に等間隔に配置する。z座標は次式で与える。

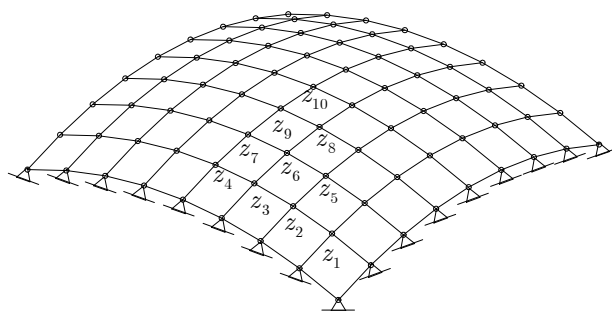
$$z = -\frac{1}{90}(x^2 + y^2) \quad (2-57)$$

設計変数はz座標のみとし、対称性を考慮すると設計変数は10個となる。制約条件である要素長総和は初期形状と同じ長さを指定し、境界条件は周囲の節点をピン支持とする。外力はxy平面に対して9.8kN/m²の等分布荷重を節点に振り分けて与える。なお、境界上に配置された要素の剛性は考慮しない。

パラメータ R_{norm} を0.1,0.2,0.3,0.4(m)と順次増加させて解析を行い、 $R_{norm}=0.4(m)$ のとき最終形状の最小固有値が1.34と比較的1.0に近くなったので解析を終了した。この時の最終形状をFig.2-9-2に示し、比較のために初期形状をFig.2-9-1に示す(z軸のスケールを拡大している)。最終形状は対称形である1/4の部分の中央付近が初期形状と比べ膨らんでおり、比較的曲げ応力を受け易い形状となっている。

最終解では4つの近似座屈荷重係数((2-27)式の固有値)が重複する。これら重複した固有値に対応する固有モードをFig.2-10に示す。図下の()内には固有モードのx軸、y軸に関する対称性、逆対称性を記入した。座屈荷重の重複した4つのモードはそれぞれx軸、y軸に対称成分、逆対称成分の異なる組合せとなっており、同じ組合せどうしの固有モードでは固有値は重複していない。

次に、実際の座屈挙動を確認するため、初期形状及び最終形状に対して改めて幾何学的非線形解析を行った。得られた頂部鉛直変位と荷重係数の関係(釣合主経路)を初期形状は細い実線で、最終形状は太い実線でFig.2-11に示す。図中、釣合経路上にある記号○及び●は、それぞれ初期形状及び最終形状の実際の臨界点を示している。水平の点線は、それぞれ細い点線は初期形状、太い点線は最終形状の近似座屈荷重係数($R_{norm} = 0.4$)を表している。臨界点を表す○及び●と近似座屈荷重を表す水平点線の縦軸の値はよく一致しており、近似座屈荷重係数は精度よく非線形座屈荷重を評価できていることが



$E=2.06 \times 10^8 \text{ kN/m}^2$
 $A=0.012 \text{ m}^2$
 $I=0.000178 \text{ m}^4$
 $\nu=0.3$
 (circular section)

Fig.2-8 初期形状 (2方向格子シェル)

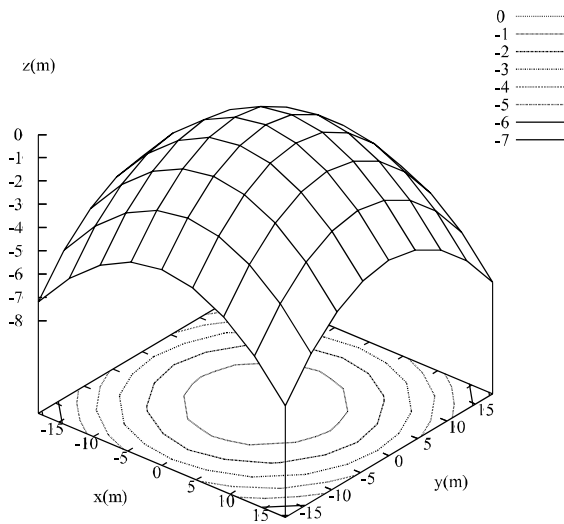


Table 2-3-1 節点z座標
: 初期形状

(unit:m)	
z1	-4.0500
z2	-2.9250
z3	-2.2500
z4	-2.0250
z5	-1.8000
z6	-1.1250
z7	-0.9000
z8	-0.4500
z9	-0.2250
z10	0.0000

Fig.2-9-1 初期形状

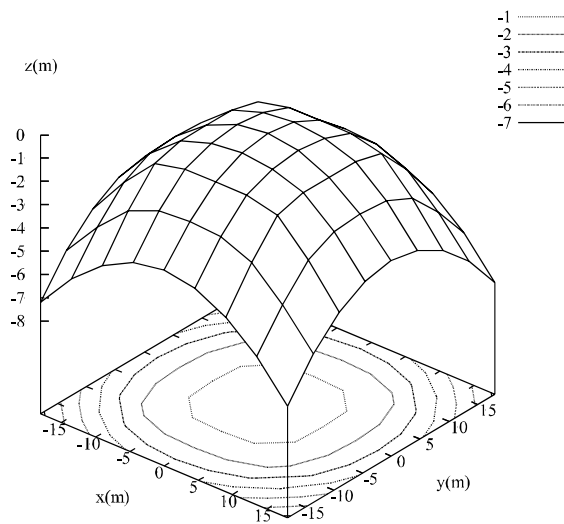


Table 2-3-2 節点z座標
: 最終形状

(unit:m)	
z1	-4.0687
z2	-2.8116
z3	-2.2442
z4	-2.1564
z5	-1.4357
z6	-1.1215
z7	-1.1296
z8	-0.6784
z9	-0.5298
z10	-0.3501

Fig.2-9-2 最終形状 ($R_{norm}=0.4$)

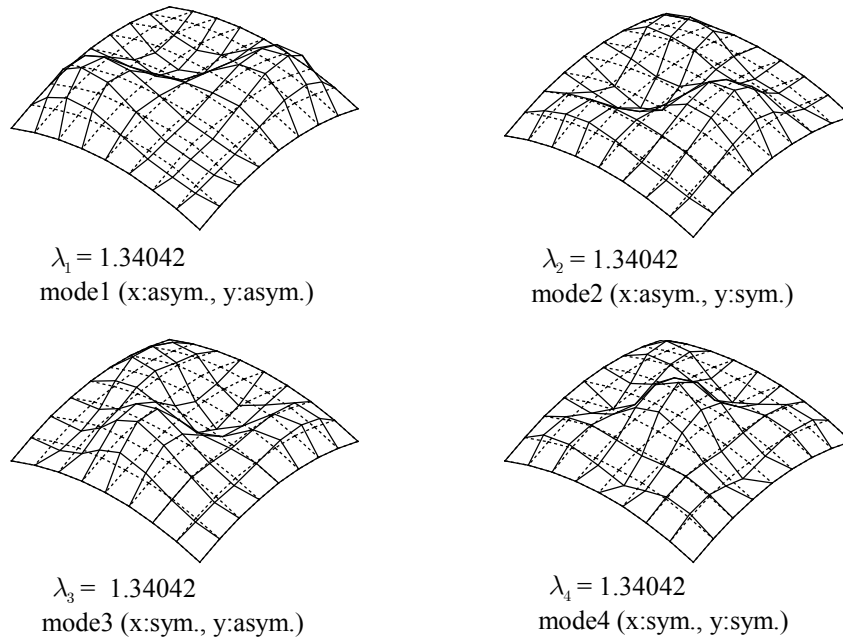


Fig.2-10 最終形状 ($R_{norm}=0.4$) の重複固有値に対応する固有モード

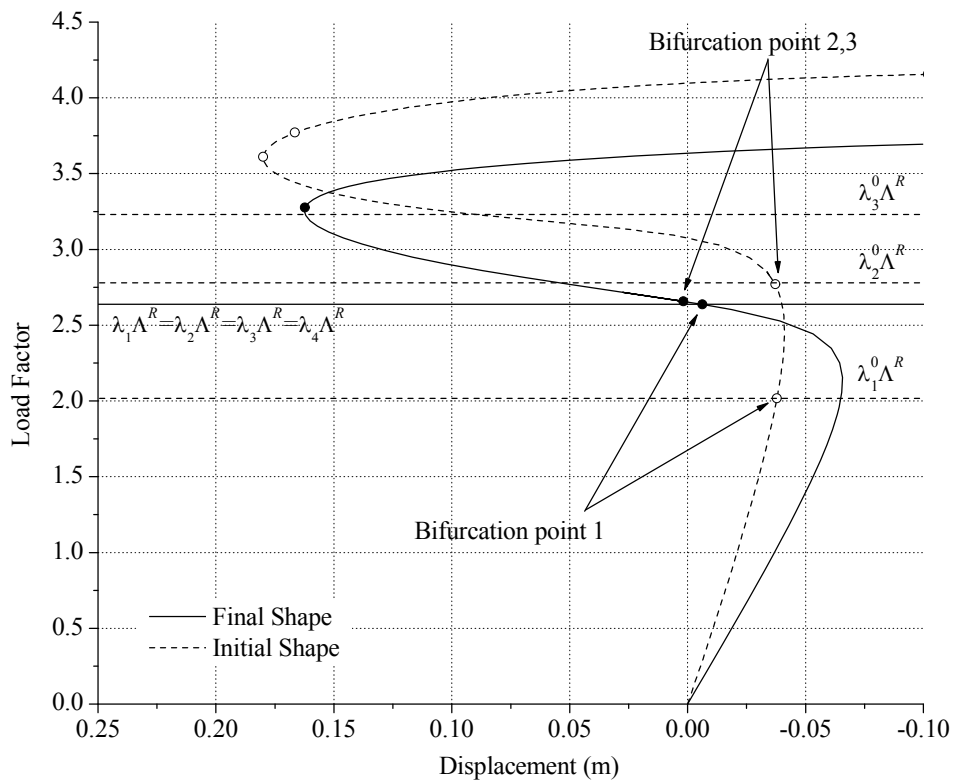


Fig.2-11 釣合曲線

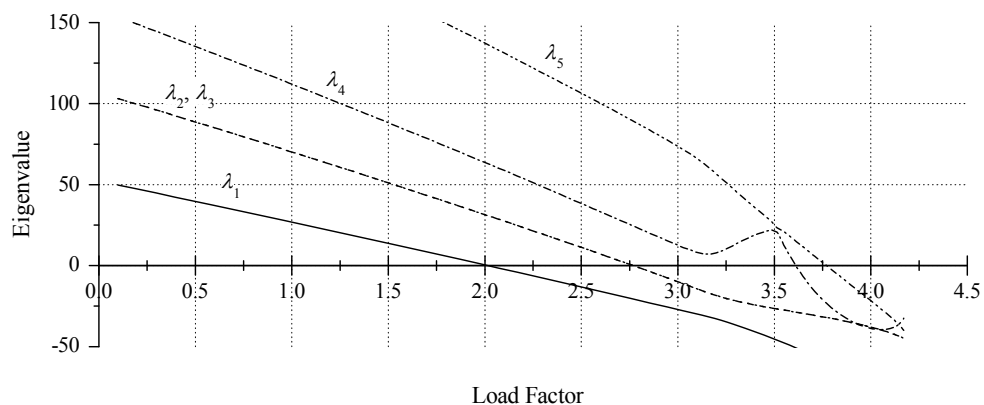


Fig.2-12-1 釣合主経路の接線剛性固有値と荷重係数の関係（初期形状）

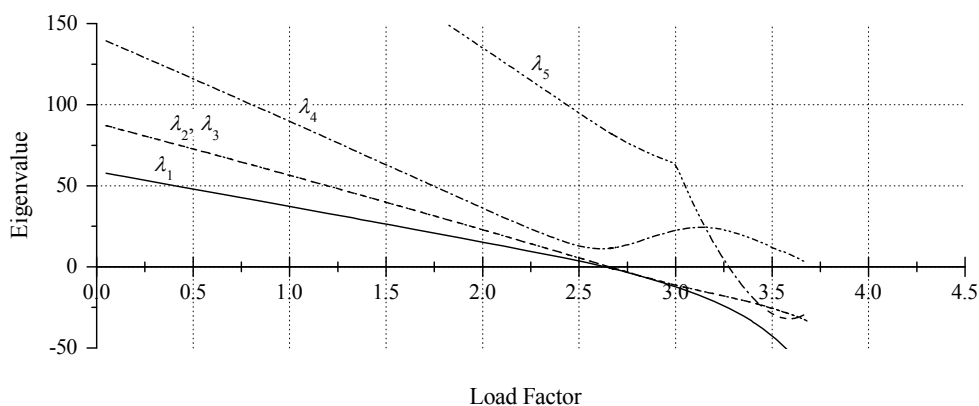
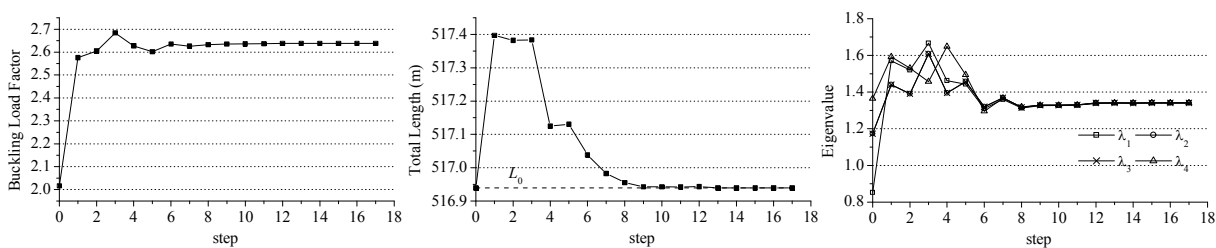


Fig.2-12-2 釣合主経路の接線剛性固有値と荷重係数の関係（最終形状）



a: 座屈荷重係数（目的関数）

b: 部材長総和（制約条件）

c: 固有値

Fig.2-13 収束履歴

Table 2-4 座屈荷重係数

mode	Initial Shape			Optimal Shape		
	present $R_{norm}=0.4$	Nonlinear Buckling	Linear Buckling	present $R_{norm}=0.4$	Nonlinear Buckling	Linear Buckling
1	2.02	2.02	2.12	2.64	2.64	2.75
2	2.78	2.77	2.91		2.66	2.77
3						
4	3.23	-	3.35		-	2.65

わかる。ただし、Fig.2-10のmode4に対応する非線形座屈荷重は、初期形状、最終形状ともに、実際には釣合経路上には存在しなかった。また、初期形状、最終形状ともに荷重の小さいほうから2番目の臨界点では2つの臨界点が重複している。これは構造形状の対称性によるものである。

初期形状及び最終形状の、釣合主経路における接線剛性行列の固有値と荷重係数の関係をFig. 2-12-1,2にそれぞれ示す。最終形状では荷重係数が増加するにつれ、4つの固有値が零軸上の1点（2.6付近）に集まるように減少しており、mode4に対応する固有値の曲線は零軸に交差することなくその後上昇していることが確認できる。また初期形状においても、同様にmode4に対応する固有値の曲線は零に近づいた後に上昇している。

初期形状及び最終形状の座屈荷重係数の値をTable 2-4に示す。表には比較のため線形座屈荷重の値も示している。また、収束履歴をFig.2-13に示す。収束判定は(2-48,49,50)式の最適性条件が十分満たされた時点としている。

結局、最終形状の非線形座屈荷重は初期形状に対して32%上昇し、mode4に対応する座屈を除く3つの座屈点が極めて近い範囲に生じる形状を得た。

2.3.2.2 座屈モードに対する剛性の比較

先の解析における初期形状及び最終形状に対して線形座屈解析を行い、前章で行ったのと同様に、各線形座屈モードの変形に対する線形剛性及び幾何剛性の大きさについて比較を行う。線形座屈問題は次式によって表せる。

$$(\mathbf{K}_L + \Lambda_i^C \mathbf{K}_G) \phi_i = \mathbf{0} \quad (2-58)$$

線形座屈モード ϕ_i を $\phi_i^T \phi_i = 1$ となるように正規化し、線形剛性及び幾何剛性の変化を表す指標として次式を定義する。

$$\begin{aligned} \alpha_i &= (\phi_i^T \mathbf{K}_L \phi_i)^{\text{opt}} / (\phi_i^T \mathbf{K}_L \phi_i)^{\text{ini}} \\ \beta_i &= (\phi_i^T \mathbf{K}_G \phi_i)^{\text{opt}} / (\phi_i^T \mathbf{K}_G \phi_i)^{\text{ini}} \end{aligned} \quad (2-59)$$

ここに上添え字のopt及びiniはそれぞれ最終形状、初期形状の値であることを表す。

mode1～4に対する α_i, β_i の算定結果をTable 2-5に示す。線形座屈荷重の値はTable 2-4で既に示しており、初期形状に比べて最終形状ではmode1の座屈荷重が上昇し、mode2～4の座屈荷重が下降してい

Table 2-5 モード別の線形座屈荷重、線形剛性及び幾何剛性の変化

	$\Lambda_i^{C-\text{opt}} / \Lambda_i^{C-\text{ini}}$	α_i	β_i
mode1	1.30	1.14	0.88
mode2	0.95	0.85	0.89
mode3	0.95	0.85	0.89
mode4	0.79	0.90	1.14

る。Table 2-5を見ると、mode1の各剛性は線形剛性が14%増大し、幾何剛性は12%減少しており、形状の変化に伴う剛性と応力分布の両方の変化が、座屈荷重を上昇させる要因となっていることが確認できる。mode2,3では幾何剛性は減少しているものの、それ以上に座屈モード方向の線形剛性が減少しているために、これが座屈荷重の低下する要因となっている。mode4では、線形剛性は減少、幾何剛性は増大しており、剛性、応力分布ともに座屈荷重を低下させる要因となっている。初期形状及び最終形状の応力分布については後の節で示す。

2.3.2.3 形状不整に対する性状の比較

先の解析における初期形状及び最終形状に対して、形状初期不整を与え、不整に対する座屈性状の比較を行う。初期不整の分布はそれぞれ(2-27)式による固有値解析 ($R_{norm} = 0.4(m)$) から得られているFig.2-10に対応する4つの固有モードのz方向成分とする。ただし、これら4つのうち2つの固有モード (mode2, mode3) は構造物の対称性により固有値が常に重複し、固有モードはこれらの任意の線形結合となる。初期形状、最終形状の不整分布が同一条件となるように、固有モードをx軸、y軸に対して完全に対称、逆対称となるように調整して定める。初期不整量は次式で表す。

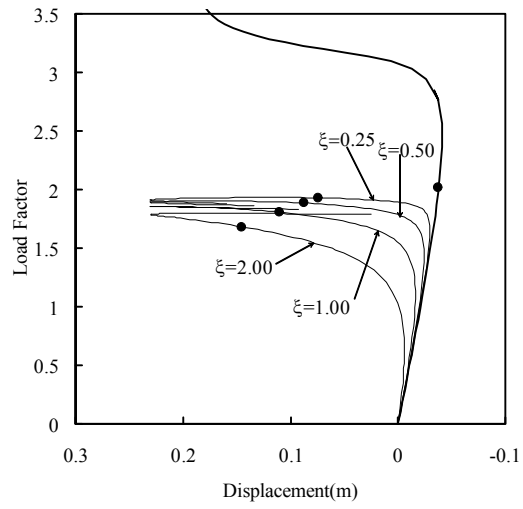
$$\text{形状不整量 } \xi = \text{不整最大振幅} / \text{部材の断面2次半径} \quad (2-60)$$

初期形状において形状不整を与えた時の釣合曲線をFig.2-14-1に示す。Fig.2-14-1の3つの図は上からそれぞれmode1、mode2,3により定めたモード、mode4の分布を持つ形状不整を与えた場合のものである。各図の細い実線が不整を与えた場合の釣合曲線であり、各曲線の不整量は図中に示してある。太い実線は完全系における釣合曲線を示している。釣合曲線上にある●は最小座屈点を示している。また、最終形状に不整を与えた場合の釣合曲線を同様にFig.2-14-2に示す。

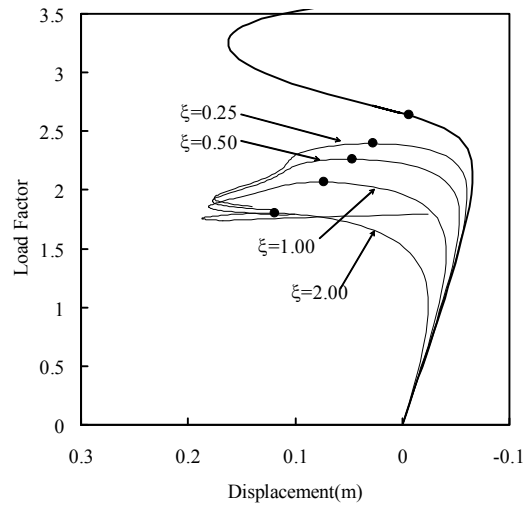
先の解析において、mode4に対応する臨界点は存在しないことを述べた。Fig.2-14-1,2-14-2のmode4の不整を与えた時の図を見ると、初期形状、最終形状ともに、完全系の釣合曲線と $\xi = -0.05$ の小さな不整を与えた時の釣合曲線とでは、(2-27)式の固有値解析により評価された座屈荷重値の付近で左右に枝分かれするように主経路の性状が変化している。初期形状、最終形状ともに、完全系の形状の近傍にmode4に対応する非対称分岐を生ずる特別な形状が存在していることがわかる。

初期形状において形状不整が座屈荷重に及ぼす影響は、不整の分布がmode1の場合に最も敏感であり、mode2,3、mode4の不整に対しては最小座屈荷重は殆ど変化していない。これは、mode1が最小座屈の座屈モードに対応しており、mode2,3、mode4の座屈モードを持つ座屈点は最小座屈から離れているためである。一方、最終形状ではこれらの座屈荷重が近接しているため、全てのモードに対して敏感な性状を示している。また、不整時の主経路の性状も初期形状と異なっており、特にmode4の負の不整を与えた時、座屈荷重の低下が著しい。

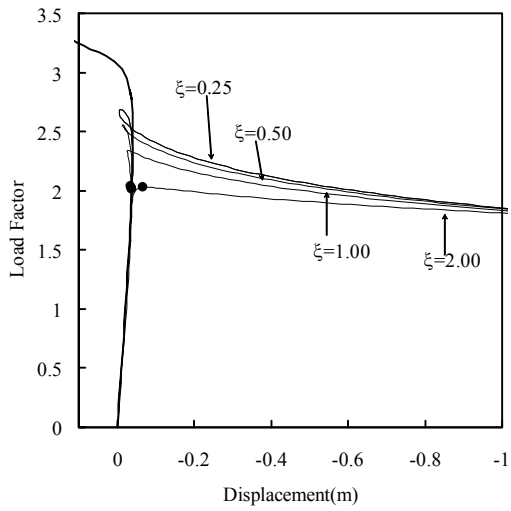
Thompson⁹⁾は、構造物に対し高度な最適設計を行うと、複数の崩壊モードが同時に生ずるような構造



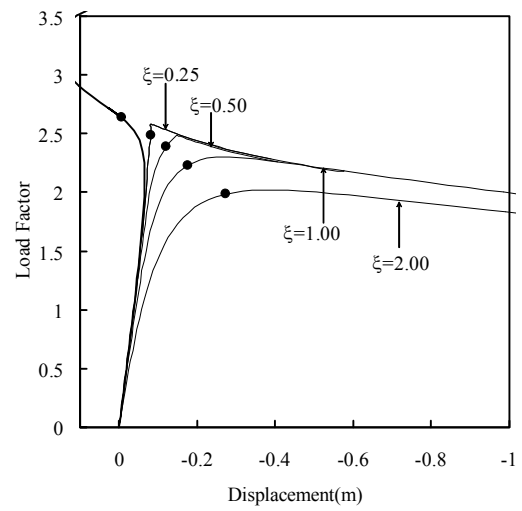
a: mode1



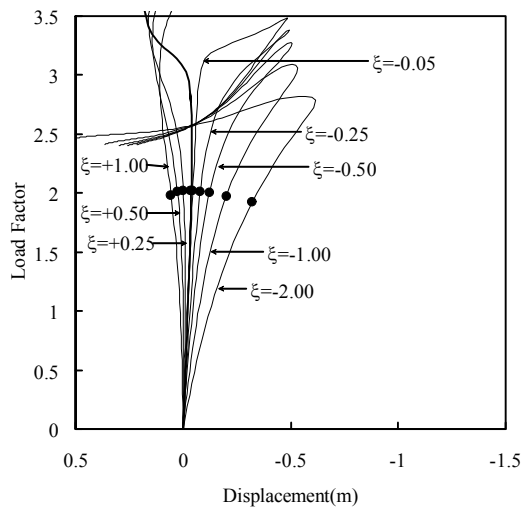
a: mode1



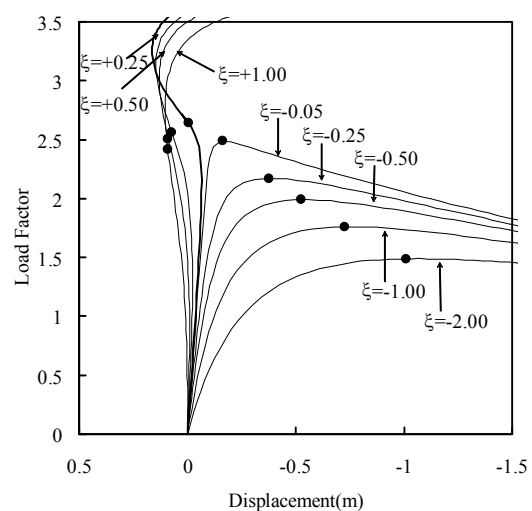
b: mode2,3



b: mode2,3



c: mode4



c: mode4

Fig.2-14-1 形状不整の影響（初期形状）

Fig.2-14-2 形状不整の影響（最終形状）

物が得られ、非線形挙動のカップリングによって不整に敏感となる傾向があることを簡単な例を挙げて指摘している。ここで示した結果ではそのような傾向がはっきりと表れており、不整振幅が $\xi=1.0$ 付近で解の有利性は失われている。

2.3.2.4 線形応力解析結果

2.3.2.1節における初期形状及び最終形状に対して、線形応力解析を行い、その性状の違いを確認する。外力は最適化解析時と同様 9.8kN/m^2 の等分布荷重を節点に振り分けて与える。解析により得られた応力図をそれぞれFig.2-15-1, Fig.2-15-2に示す。図は格子シェルの4分の1の部分を表しており、図の右側及び下側に配置された部材が境界部である。曲げモーメントは面外方向のモーメントを示している。初期形状に比べ最終形状は比較的大きな応力を生じていることがわかる。

空間構造は多くの場合、面内応力が支配的となるように、曲率が大きく滑らかに湾曲した曲面形状を採用する。この為、座屈前変形は比較的小さくなり、安定性の問題は古典的な初期安定問題としての扱いが可能な場合も多い。しかし先に示したアーチ及び2方向格子シェルの解析結果から、比較的座屈前変形が大きくとも弾性安定性の高い形状が存在することがわかる。ただし、歪が大きくなるため、

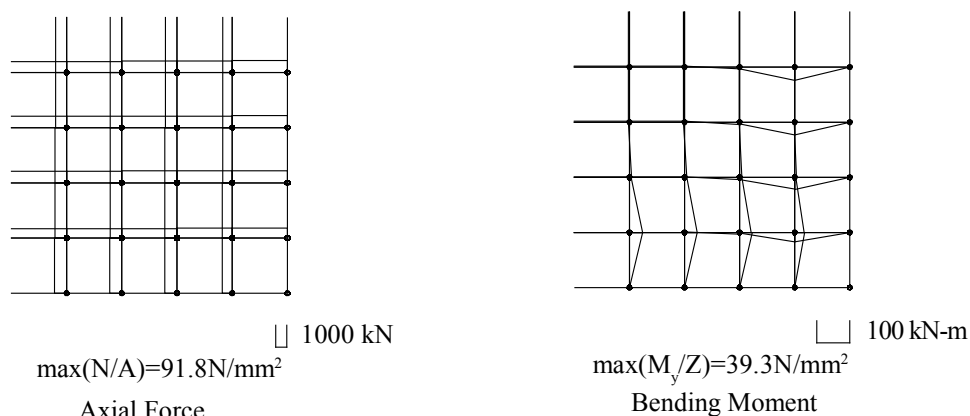


Fig.2-15-1 応力図（初期形状）

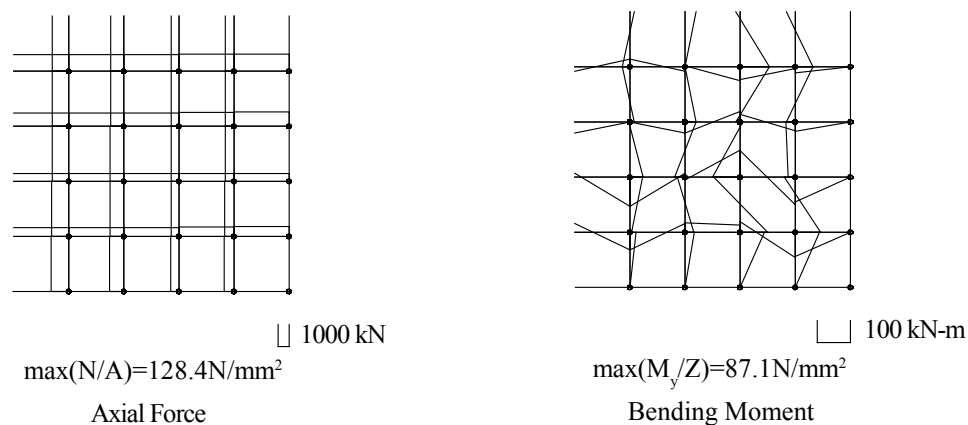


Fig.2-15-2 応力図（最終形状）

現実的には材料非線形性の影響を考慮する必要が生じてくる。

2.4 2章のまとめ

座屈荷重と構造形状の間にある力学的な傾向を把握することを目的とし、座屈荷重を構造形状の関数として扱い、数理計画法を用いてスペースフレームの座屈荷重が最大となる形態を求める問題を扱った。この問題では最適解で座屈荷重の重複を生じる傾向があり、非線形座屈荷重を厳密に最大化することは困難となる。この為、最適化方法について次の工夫を行った。

- ・臨界点の消失や感度解析の煩雑さを回避するための方法として、指定変位ノルムをもつ釣合点で固有値解析を行う座屈前変形を考慮した座屈荷重の近似評価法とその感度解析手法を提案した。(2.2.3 節)
- ・座屈荷重感度が設計変数に対して連続となるようモードの連続性を評価し、座屈荷重の重複を考慮した最適化問題の設定を行った。(2.2.4.1 節)
- ・座屈荷重が重複或いは近接した際に、単根の固有値感度式を用いて座屈荷重の感度が正しく評価できていることの確認を行った。(2.2.4.3 節)

アーチ及び二方向格子シェルの数値解析例を通して、提案した感度解析手法によって比較的容易に非線形座屈荷重を制御することが可能であることを示した。また、得られた解析結果の力学性状について検討を行い、その結果、この種の問題における基本的な性状として、以下のような傾向を確認することができた。

- 1) 弾性安定性の高い構造形状は、空間構造に広く採用される面内抵抗型の構造形状と必ずしも同じ傾向に無く、比較的座屈前変形が大きな構造形状においても安定性の高い場合がある。
- 2) 空間構造の座屈荷重の最大化を目的として形状最適化を行うと、最適解で複数の座屈荷重が重複する傾向があり、不整に対し敏感な構造物となる場合がある。

第 I 部で示したような、外力に対し軸力や膜力のみで抵抗し曲げモーメントの生じない構造形状が必ずしも座屈荷重が大きいわけでは無いことを確認した。実際の構造計画に反映可能な構造形状を得るには、問題に応じて、材料非線形性や応力に関する制約条件を考慮する必要性や、施工時の不整の許容誤差による座屈荷重の低減を考慮した最適化を行う必要がある。

スペースフレームでは全体座屈のほかに個材座屈、局部座屈などの複雑な座屈挙動を示し、比較的座屈荷重の近い範囲に様々な座屈モードを持つ。この為、2.2.4.1 節で示した方法では形状の変化に対して固有モードの連続性を評価することが困難となり、解析例は限られたものとなった。また、重複固有値に対し、単根の固有値感度で評価可能であった理由に対しては明確にしていない。次章では、これらの問題を解決する。

3. 対称性を利用した重複固有値感度の評価とトラスドームの形状最適化

3.1 はじめに

構造物は支配的な外力に対し、十分な安定性を有するように設計される必要がある。構造物の形状、寸法は座屈挙動に大きな影響を与える。このため設計の初期段階において安定性の高い構造形状を検討することは有効である。構造物の安定性を概略的に評価することのできる線形座屈荷重を目的関数とし、最適化手法によって安定性の高い形状を求めようとする試みは、このような考え方を実現するうえで、最も基本的な問題である。線形座屈荷重などの固有値を目的関数として構造物の最適設計を行う場合、最適解で複数の固有値が重複する傾向がある。この場合、固有値の感度係数は設計変数に対し不連続となり、感度解析手法に基づく非線形計画法では最適解を求めることが困難となることが知られている^{1),2)}。

この種の問題に対し、Seyranian et al³⁾やCzyz et al⁴⁾などの既往の研究では、固有値の重複を考慮した最適性条件を導き、最適性基準法により解を求めている。また、寒野ら⁵⁾は指定線形座屈荷重係数を有するトラスのトポロジー最適化問題に対し、半正定値計画法を適用し、比較的固有値の重複度の大きい問題に対しても解を求めており、その有効性が示されている。これらの研究は、解における重複固有値の感度の不連続性に対して、最適化手法を検討するものである。本研究ではこの種の問題を解く異なるアプローチとして、構造物の対称性を利用して重複固有値の感度を評価し、従来用いられている非線形計画法によって解を求める方法を提案する。

構造物の対称性と剛性行列の固有値には深い関わりがあることが知られている。対称性を数学的に扱う群論^{6),7)}の知識を援用することによって、対称性を有する構造物の剛性行列は既約表現で類別される幾つかのブロック行列に対角化される。この考えを利用すれば、座屈問題における固有値、固有モードは既約表現によって分類、整理することができる。Ikeda et al^{8),9)}は対称性を有する立体トラス構造の分岐座屈経路を群論を利用して分類階層化する手法を提案しており、またブロック対角化により計算効率が向上する結果が示されている。

本章では、座屈が設計要件として支配的になりやすく、幾何学的に強い対称性をもって設計されることの多い単層トラスドームの形状最適化問題を扱う。この問題の解において頻繁に生じる固有値の重複を、その固有値を与える固有モードの属している既約表現という観点から考察する。結果として、最適解における固有値の重複の多くは、異なる既約表現間での固有値の一致であることが示される。また、予め構造物の対称性を考慮し剛性行列のブロック対角化を行うことで、重複固有値の感度を評価することが可能であり、従来の非線形計画問題として定式化が可能であ

ることを示す。ここでは点群 C_{6v} の対称性を有する単層トラスドームの数値解析例を通して提案手法の有効性を示すとともに、最適形状の力学的性質についても検討する。

提案する方法は、一般に広く普及した非線形計画法を用いて、固有値の重複した最適解を求めることを可能とし、また、最適化により重複固有値の生成されるメカニズムが明らかとなり、結果に対し力学的な考察を行ううえでも有用な方法である。最適解において同じ既約表現の固有値が重複するような問題に対して適用することはできないが、ここで示す以外の固有値最適化問題に対しても適用可能である。

尚、本文中には群論の用語や式表現が用いられている。これらは文献(6),(7)に従っている。

3.2 対称性による剛性行列のブロック対角化

例えば、軸対称なシェルの線形静的問題における支配方程式は、周方向にフーリエ級数展開することで、展開波（周方向のモード）別に独立した方程式に分解される。固有値や固有モードの性状は、周方向のモード別に評価することができる。こうした支配方程式の分解は、構造物の力学性状を整理し、理解する上で役立つものと考えられる。ここでは、離散系構造物の形状最適化において生ずる重複固有値の性質を把握するために、比較的複雑な対称性を有するトラス構造物の支配方程式を、予めその対称性に応じた幾つかの独立した方程式に分解する。

3.2.1 構造物の対称性と対称操作による変位の変換

物体の対称性は、その物体を不変に保つ変換をすべて列挙することにより記述される。ここでは、 z 軸回りに $\pi/3$ 毎の6つの回転（回転角が0の回転を含む）と、 z 軸回りに $\pi/6$ 毎に傾く6つの平面に対する鏡映に対して不変となるトラス構造物を解析対象とする（Fig.3-1）。この対称性は点群で言うと C_{6v} に該当する。上述の計12個の対称操作をそれぞれ記号で表し、集合として次式のように表現する。

$$C_{6v} = \{E, C_6^1, C_6^2, C_6^3, C_6^4, C_6^5, \sigma_x^1, \sigma_x^2, \sigma_x^3, \sigma_y^1, \sigma_y^2, \sigma_y^3\} \quad (3-1)$$

E は恒等操作を表し、 C_6^k は z 軸回りの $k\pi/3$ の回転操作を表す。 σ_x^k, σ_y^k は鏡映操作であり、対応する鏡映面はFig.3-1に示してある。

変位の拘束されていない節点数を N とし、各節点の位置ベクトルを $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_N$ とする。これらの位置ベクトルに対する任意の対称操作 $R (\in C_{6v})$ の作用は 3×3 の直交行列 \mathbf{R} によって表すことができる。対称操作により節点 k が同種の節点 l に重ねられ、 $l = R(k)$ と表すことにすれば次式のように表現できる。

$$\mathbf{R}\mathbf{r}_k = \mathbf{r}_{R(k)} \quad (3-2)$$

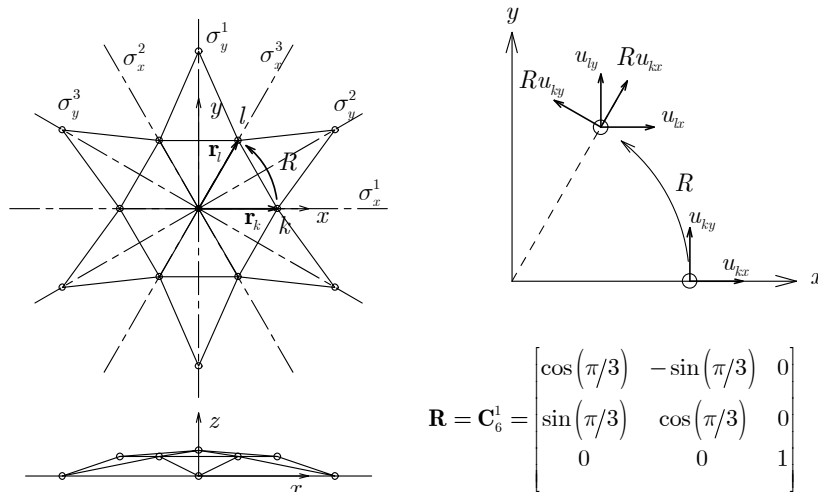


Fig. 3-1 変位の変換

節点 k の変位ベクトル $\mathbf{u}_k = \{u_{kx}, u_{ky}, u_{kz}\}^T$ に対する対称操作の働きを定義する。 $3N$ 個の変位成分 $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N\}$ を独立変数にもつ任意の関数を $f(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N)$ と表し、この関数に対称操作 R を作用させた関数 $Rf(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N)$ を次式によって定義する。

$$Rf(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N) = f(\mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}_{R(1)}, \mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}_{R(2)}, \dots, \mathbf{R}^{-1}\mathbf{u}_{R(N)}) \quad (3-3)$$

$3N$ 個の基底として $f_{k\alpha}(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_N) = u_{k\alpha}$ ($k = 1, 2, \dots, N$) ($\alpha = x, y, z$) を選び、上式を用いて $3N$ 個の関係式を連立させることで次式のような C_{6v} の $3N$ 次元の可約な表現行列 $\mathbf{D}(R)$ が得られる。

$$[Rf_{1x}, Rf_{1y}, Rf_{1z}, \dots, Rf_{Nx}, Rf_{Ny}, Rf_{Nz}] = [f_{1x}, f_{1y}, f_{1z}, \dots, f_{Nx}, f_{Ny}, f_{Nz}] \mathbf{D}(R) \quad (3-4)$$

上式は対称操作 R による基底の変換を表す。

任意の変位ベクトルを $\mathbf{U} = \{u_{1x}, u_{1y}, u_{1z}, \dots, u_{Nx}, u_{Ny}, u_{Nz}\}^T$ と表し、これを(3-4)式の対称操作により変換された基底で表現したときの変位ベクトルを $\mathbf{U}' = \{u'_{1x}, u'_{1y}, u'_{1z}, \dots, u'_{Nx}, u'_{Ny}, u'_{Nz}\}^T$ と表すものとする。 \mathbf{U} と \mathbf{U}' には次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{U}' = \mathbf{D}(R)^{-1} \mathbf{U} \quad (3-5)$$

節点力ベクトルに対しても、同様の基底の変換を行うものとするれば、対称操作前の基底で表現される剛性行列 \mathbf{K} と対称操作後の基底で表される剛性行列 \mathbf{K}' との間には、次の相似変換が成り立つ。

$$\mathbf{K}' = \mathbf{D}(R)^{-1} \mathbf{K} \mathbf{D}(R) \quad (3-6)$$

対称操作 $R(\in C_{6v})$ により、全ての基底は構造物の対称性に従って回転、鏡映される (Fig.3-2)。この変換は、基底と構造形態との関係に本質的な変化を与えないため、剛性行列は不変となる。即ち、対称性を有する構造物の剛性行列の性質として、次式が成り立つ。

$$\mathbf{K} = \mathbf{D}(R)^{-1} \mathbf{K} \mathbf{D}(R) \quad (3-7)$$

これは書き換えれば、次式となる。

$$\mathbf{K}\mathbf{D}(R) = \mathbf{D}(R)\mathbf{K} \quad (3-8)$$

これは全ての対称操作について成り立つ。

構造物の線形座屈荷重係数は一般に次式のような実対称行列の一般固有値問題の固有値として求められる。

$$[\mathbf{K}_L + \lambda_i \mathbf{K}_G] \phi_i = \mathbf{0} \quad (3-9)$$

ここに、 \mathbf{K}_L は線形剛性行列、 \mathbf{K}_G は幾何剛性行列であり、 λ_i は線形座屈荷重係数、 ϕ_i は線形座屈モードを表す。任意の構造物に対して、 $\mathbf{K}_L, \mathbf{K}_G$ は通常の意味での対称行列である。この一般的な性質に加えて、構造形態、外力モードがともに C_{6v} の対称性を持ち、 $\mathbf{K}_L, \mathbf{K}_G$ が(3-8)式の性質を有するものとする。この場合、(3-9)式の ϕ_i を $\mathbf{D}(R)\phi_i$ に置き換え、(3-8)式の関係を用いると次式を得る。

$$[\mathbf{K}_L + \lambda_i \mathbf{K}_G] \mathbf{D}(R)\phi_i = \mathbf{D}(R)[\mathbf{K}_L + \lambda_i \mathbf{K}_G] \phi_i = \mathbf{0} \quad (3-10)$$

上式は、 $\mathbf{D}(R)\phi_i$ もまた固有ベクトルであり、固有値が λ_i であることを表す。固有値が d 重に縮退している場合は、 $\mathbf{D}(R)\phi_i$ は固有値が λ_i となる互いに独立な d 個のベクトルの線形結合により表される。これらは固有ベクトルが既約表現の基底となっていることを意味する。(既約表現に関する補足を付録Eに記す。)

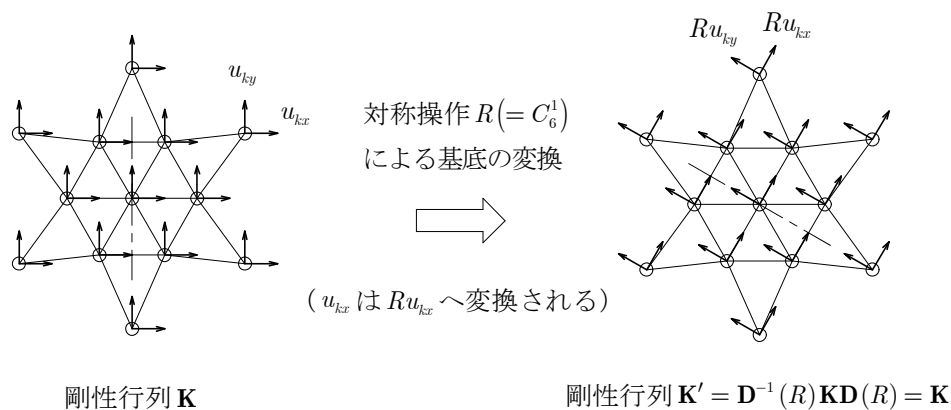
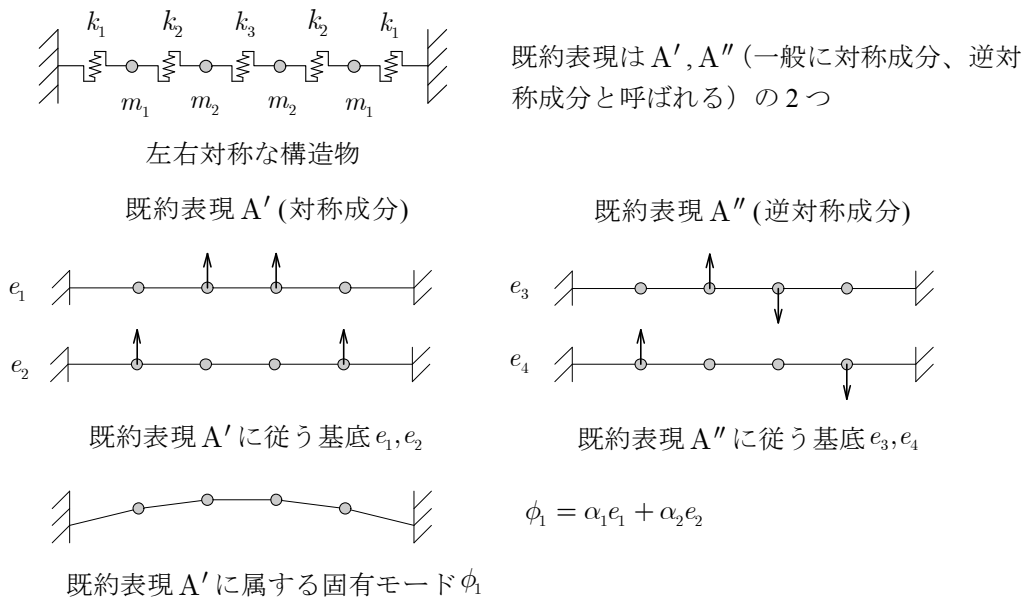


Fig. 3-2 対称操作による基底の変換と剛性行列の不変性

3.2.2 剛性行列のブロック対角化

構造物の $3N$ 個の基底を、互いに独立かつ既約表現に従う基底に取り直した場合について考える (既約表現に従う基底の選び方は無数にあるが、そのひとつが選択されるものとする。また、そのような基底の作成方法が後述される)。 C_{6v} の対称性を有する場合、既約表現は $A_1, A_2, B_1, B_2, E_1, E_2$ の 6 つであり、 $3N$ 個の基底はそれぞれこのいずれかの既約表現に属することになる (単純な所謂、左右対称とした場合では、既約表現は A', A'' の 2 つであり、この場合の具体的な例を Fig. 3-3 に示した)。固

Fig. 3-3 左右対称(C_2)な構造物の例

有モードは前述のように既約表現の基底となる。この為、これらの基底で固有モードを表現した場合、固有モードは同じ既約表現に属する基底の線形結合によって表される。

固有モードを基底とした場合、剛性行列は完全に対角化され、支配方程式は $3N$ 個の独立した方程式に分解される。即ち、支配方程式は $3N$ 個の基底の間に従属関係を生まない。一方、上述のような既約表現に従う任意の基底に変換した場合、固有モードは同じ既約表現の基底の線形結合で表されるため、同じ既約表現の基底の間のみ従属関係を生じる。従って、支配方程式は既約表現毎の独立した方程式となり、剛性行列は既約表現毎のブロック行列に対角化されることとなる。

Fig. 3-4 に示した点群 C_{6v} の対称性を有するトラス構造物を例にあげる。(3-4)式で表される表現行列は一般には可約な表現行列となっており、この表現行列を簡約することで、どの既約表現が幾つ含まれるかを知ることができる。Fig. 3-4 の構造物の表現行列を簡約すると $12A_1 + 7A_2 + 10B_1 + 8B_2 + 19E_1 + 18E_2$ となる。即ち、この構造物には既約表現 A_1 に属する固有モードが 12 個存在し、同様に A_2 は 7 個、 B_1 は 10 個、 B_2 は 8 個存在している。 E_1 及び E_2 は 2 次元表現であるため E_1 は 2×19 個、 E_2 は 2×18 個の固有モードが存在する。固有値解析を行わずに、対称性の情報により剛性行列をブロック対角化するには、これらの既約表現に従う合計 111 個の独立な基底モードを作成する必要がある。

3.2.2.1 既約表現に従う基底モードの作成

基底モードを作成する際に、構造物の全ての変位成分を同時に扱うのは計算の規模が大きくなる。こ

Table 3-1 点群 C_{6V} の既約表現の指標

C_{6V}	E	$2C_6$	$2C_6^2$	C_6^3	$2\sigma_y$	$2\sigma_x$
A_1	1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	1	-1	-1	1
E_1	2	1	-1	-2	0	0
E_2	2	-1	-1	2	0	0

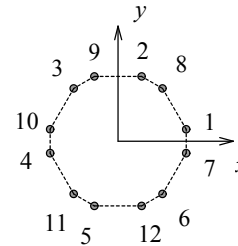


Fig.3-6 12節点集合

(3-12)式の表現行列の簡約を行う。可約な表現に含まれる既約な表現 α の数 q_α は、次式により算定することができる。

$$q_\alpha = \frac{1}{g} \sum_k h_k \chi^{(\alpha)}(C_k)^* \chi(C_k) \quad (3-15)$$

ここに、 C_k は類を表し、 h_k はその類に属する対称操作の数を表す。 g は対称操作の総数を表し、ここでは12となる。 $\chi^{(\alpha)}(C_k)$ は、既約表現 α の類 C_k における指標を意味し、 $\chi(C_k)$ は可約表現の類 C_k における指標を意味する。（*印は複素共役を意味するが、ここでの指標は全て実数となるので考慮する必要はない。）既約表現の指標は自分で算定することもできるが、群論の一般的な書籍にまとめて記載されている。点群 C_{6V} における既約表現の指標をTable 3-1に示す。

Table 3-1 及び(3-13)式の指標を(3-15)式に代入すると、次式のように算定される。

$$\begin{aligned} q_{A_1} &= \frac{1}{12}(1 \times 1 \times 36) = 3, & q_{A_2} &= \frac{1}{12}(1 \times 1 \times 36) = 3, & q_{B_1} &= \frac{1}{12}(1 \times 1 \times 36) = 3 \\ q_{B_2} &= \frac{1}{12}(1 \times 1 \times 36) = 3, & q_{E_1} &= \frac{1}{12}(1 \times 2 \times 36) = 6, & q_{E_2} &= \frac{1}{12}(1 \times 2 \times 36) = 6 \end{aligned} \quad (3-16)$$

従って、(3-12)式で表される可約な表現 D は、基底を適宜選ぶことによって次式のように簡約されることがわかる。

$$D = 3A_1 + 3A_2 + 3B_1 + 3B_2 + 6E_1 + 6E_2 \quad (3-17)$$

次に、表現が既約となる基底を作成する。基底の作成には、次式の射影演算子を利用する。

$$P_{l(m)}^{(\alpha)} = \frac{d_\alpha}{g} \sum_R D_{lm}^{(\alpha)}(R)^* R \quad (3-18)$$

ここに、 $D_{lm}^{(\alpha)}(R)$ は対称操作 R における既約表現 α の表現行列の l 行 m 列成分を表す。すなわち、 α が一次元の既約表現の場合では、その表現は 1×1 であるため $D_{11}^{(\alpha)}(R) = \chi^{(\alpha)}(R)$ を意味し、二次元の既約表現の場合では、 2×2 の既約な表現行列を具体的に与える必要がある。 d_α は既約表現 α の次元を表す。点群 C_{6V} の場合について、上式の射影演算子を具体的に書き表せば、次式ようになる。（二次元既約表現の表現行列については、 E_1 は基底 x, y の表現行列を、 E_2 は基底 $2xy, x^2 - y^2$ の表現行列を

与えた。)

$$\begin{aligned}
 P^{(A1)} &= \frac{1}{12}(E + C_6 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + \sigma_x^1 + \sigma_y^3 + \sigma_x^2 + \sigma_y^1 + \sigma_x^3 + \sigma_y^2) \\
 P^{(A2)} &= \frac{1}{12}(E + C_6 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 - \sigma_x^1 - \sigma_y^3 - \sigma_x^2 - \sigma_y^1 - \sigma_x^3 - \sigma_y^2) \\
 P^{(B1)} &= \frac{1}{12}(E - C_6 + C_6^2 - C_6^3 + C_6^4 - C_6^5 - \sigma_x^1 + \sigma_y^3 - \sigma_x^2 + \sigma_y^1 - \sigma_x^3 + \sigma_y^2) \\
 P^{(B2)} &= \frac{1}{12}(E - C_6 + C_6^2 - C_6^3 + C_6^4 - C_6^5 + \sigma_x^1 - \sigma_y^3 + \sigma_x^2 - \sigma_y^1 + \sigma_x^3 - \sigma_y^2) \\
 P_{1(1)}^{(E1)} &= \frac{1}{12}(2E + C_6 - C_6^2 - 2C_6^3 - C_6^4 + C_6^5 + 2\sigma_x^1 + \sigma_y^3 - \sigma_x^2 - 2\sigma_y^1 - \sigma_x^3 + \sigma_y^2) \\
 P_{2(2)}^{(E1)} &= \frac{1}{12}(2E + C_6 - C_6^2 - 2C_6^3 - C_6^4 + C_6^5 - 2\sigma_x^1 - \sigma_y^3 + \sigma_x^2 + 2\sigma_y^1 + \sigma_x^3 - \sigma_y^2) \\
 P_{1(2)}^{(E1)} &= \frac{\sqrt{3}}{12}(-C_6 - C_6^2 + C_6^4 + C_6^5 - \sigma_y^3 - \sigma_x^2 + \sigma_x^3 + \sigma_y^2) \\
 P_{2(1)}^{(E1)} &= \frac{\sqrt{3}}{12}(C_6 + C_6^2 - C_6^4 - C_6^5 - \sigma_y^3 - \sigma_x^2 + \sigma_x^3 + \sigma_y^2) \\
 P_{1(1)}^{(E2)} &= \frac{1}{12}(2E - C_6 - C_6^2 + 2C_6^3 - C_6^4 - C_6^5 - 2\sigma_x^1 + \sigma_y^3 + \sigma_x^2 - 2\sigma_y^1 + \sigma_x^3 + \sigma_y^2) \\
 P_{2(2)}^{(E2)} &= \frac{1}{12}(2E - C_6 - C_6^2 + 2C_6^3 - C_6^4 - C_6^5 + 2\sigma_x^1 - \sigma_y^3 - \sigma_x^2 + 2\sigma_y^1 - \sigma_x^3 - \sigma_y^2) \\
 P_{1(2)}^{(E2)} &= \frac{\sqrt{3}}{12}(C_6 - C_6^2 + C_6^4 - C_6^5 - \sigma_y^3 + \sigma_x^2 - \sigma_x^3 + \sigma_y^2) \\
 P_{2(1)}^{(E2)} &= \frac{\sqrt{3}}{12}(-C_6 + C_6^2 - C_6^4 + C_6^5 - \sigma_y^3 + \sigma_x^2 - \sigma_x^3 + \sigma_y^2)
 \end{aligned} \tag{3-19}$$

(3-19) 式は対称操作により表現されているので、対応する表現行列 ((3-12)式) を用いてこの射影演算子をマトリクス表現する。このマトリクスに任意のベクトルを作用させることで、そのベクトルに含まれている既約表現に従うモードを抽出することができる。ここではベクトルの与え方として、節点集合を構成している任意の節点 i の基底 u_{ix}, u_{iy}, u_{iz} を表す x, y, z 方向の各単位ベクトルを選び、マトリクス表現された射影演算子にそれぞれ作用させる。これにより、各既約表現に従う合計 36 個のモードが抽出される。得られたモードを Fig.3-7 に示す。

以下、その他の節点集合に対しても同様の手順で基底モードを作成する。射影演算子に1節点の x, y, z 方向の単位ベクトルを作用させたことで、抽出されたモードには、多くの場合に、互いに直交関

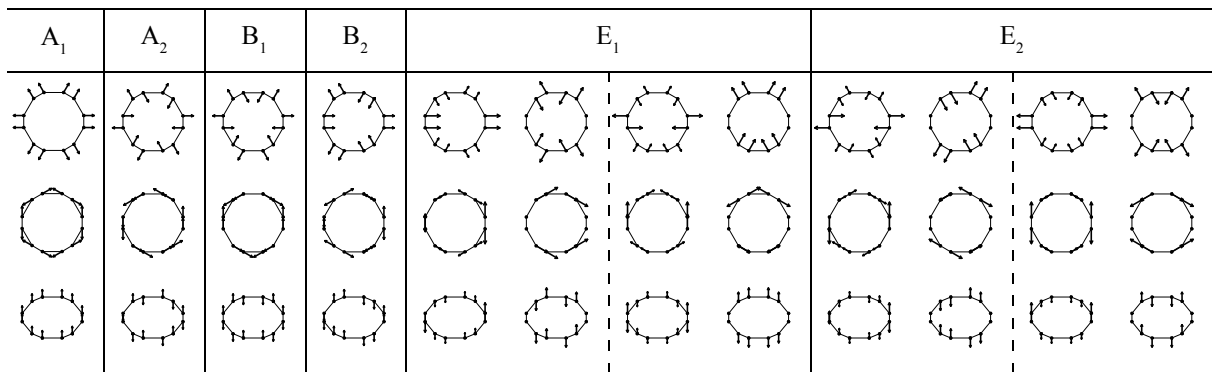


Fig.3-7 基底モード (12 節点集合)

係が成り立つ。しかし、作用させる節点の選び方によっては、二次元既約表現 (E_1, E_2) のモードに従属関係を生じるようである。このため、モードの直交性については常に確認する必要がある。

■ 6 節点集合 (σ_x 鏡映面上)

6節点集合の節点番号を Fig.3-8 のように定める。この場合、各対称操作の表現行列は次式で表される。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D}(E) &= \begin{bmatrix} E & & & & & \\ & E & & & & \\ & & E & & & \\ & & & E & & \\ & & & & E & \\ & & & & & E \end{bmatrix}, & \mathbf{D}(C_6^1) &= \begin{bmatrix} C_6^1 & & & & & C_6^1 \\ & C_6^2 & & & & \\ & & C_6^3 & & & \\ & & & C_6^4 & & \\ & & & & C_6^5 & \\ & & & & & C_6^6 \end{bmatrix}, & \mathbf{D}(C_6^2) &= \begin{bmatrix} & & & & & C_6^2 \\ & & & & & C_6^2 \\ C_6^2 & & & & & \\ & C_6^2 & & & & \\ & & C_6^2 & & & \\ & & & C_6^2 & & \end{bmatrix} \\
 \mathbf{D}(C_6^3) &= \begin{bmatrix} & & & & & C_6^3 \\ & & & & & C_6^3 \\ & & & & & C_6^3 \\ C_6^3 & & & & & \\ & C_6^3 & & & & \\ & & C_6^3 & & & \\ & & & C_6^3 & & \end{bmatrix}, & \mathbf{D}(C_6^4) &= \begin{bmatrix} & & & & & C_6^4 \\ & & & & & C_6^4 \\ & & & & & C_6^4 \\ & & & & & C_6^4 \\ C_6^4 & & & & & \\ & C_6^4 & & & & \\ & & C_6^4 & & & \\ & & & C_6^4 & & \end{bmatrix}, & \mathbf{D}(C_6^5) &= \begin{bmatrix} & & & & & C_6^5 \\ & & & & & C_6^5 \\ & & & & & C_6^5 \\ & & & & & C_6^5 \\ & & & & & C_6^5 \\ C_6^5 & & & & & \\ & C_6^5 & & & & \\ & & C_6^5 & & & \\ & & & C_6^5 & & \end{bmatrix} \\
 \mathbf{D}(\sigma_x^1) &= \begin{bmatrix} \sigma_x^1 & & & & & \\ & \sigma_x^1 & & & & \\ & & \sigma_x^1 & & & \\ & & & \sigma_x^1 & & \\ & & & & \sigma_x^1 & \\ & & & & & \sigma_x^1 \end{bmatrix}, & \mathbf{D}(\sigma_y^3) &= \begin{bmatrix} & & & & & \sigma_y^3 \\ & & & & & \sigma_y^3 \\ & & & & & \sigma_y^3 \\ & & & & & \sigma_y^3 \\ & & & & & \sigma_y^3 \\ \sigma_y^3 & & & & & \\ & \sigma_y^3 & & & & \\ & & \sigma_y^3 & & & \\ & & & \sigma_y^3 & & \end{bmatrix}, & \mathbf{D}(\sigma_x^2) &= \begin{bmatrix} & & & & & \sigma_x^2 \\ & & & & & \sigma_x^2 \\ & & & & & \sigma_x^2 \\ & & & & & \sigma_x^2 \\ & & & & & \sigma_x^2 \\ \sigma_x^2 & & & & & \\ & \sigma_x^2 & & & & \\ & & \sigma_x^2 & & & \\ & & & \sigma_x^2 & & \end{bmatrix} \\
 \mathbf{D}(\sigma_y^1) &= \begin{bmatrix} & & & & & \sigma_y^1 \\ & & & & & \sigma_y^1 \\ & & & & & \sigma_y^1 \\ & & & & & \sigma_y^1 \\ & & & & & \sigma_y^1 \\ \sigma_y^1 & & & & & \\ & \sigma_y^1 & & & & \\ & & \sigma_y^1 & & & \\ & & & \sigma_y^1 & & \end{bmatrix}, & \mathbf{D}(\sigma_x^3) &= \begin{bmatrix} & & & & & \sigma_x^3 \\ & & & & & \sigma_x^3 \\ & & & & & \sigma_x^3 \\ & & & & & \sigma_x^3 \\ & & & & & \sigma_x^3 \\ \sigma_x^3 & & & & & \\ & \sigma_x^3 & & & & \\ & & \sigma_x^3 & & & \\ & & & \sigma_x^3 & & \end{bmatrix}, & \mathbf{D}(\sigma_y^2) &= \begin{bmatrix} & & & & & \sigma_y^2 \\ & & & & & \sigma_y^2 \\ & & & & & \sigma_y^2 \\ & & & & & \sigma_y^2 \\ & & & & & \sigma_y^2 \\ \sigma_y^2 & & & & & \\ & \sigma_y^2 & & & & \\ & & \sigma_y^2 & & & \\ & & & \sigma_y^2 & & \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3-20}$$

これら表現行列の指標は次式のようなになる。恒等操作 E と鏡映操作 σ_x については、自身に移る節点が存在するため非零であり、それ以外の対称操作については各節点が他の節点に移るため零となる。

$$\chi(E) = 3 \times 6 = 18, \quad \chi(C_6) = 0, \quad \chi(C_6^2) = 0, \quad \chi(C_6^3) = 0, \quad \chi(\sigma_y) = 0, \quad \chi(\sigma_x) = 2 \tag{3-21}$$

Table3-1 及び(3-21)式の指標を(3-15)式に代入し、(3-20)式の可約な表現に含まれる既約表現の数を算定すると次のようになる。

$$\begin{aligned}
 q_{A1} &= \frac{1}{12}(1 \times 1 \times 18 + 3 \times 1 \times 2) = 2, & q_{A2} &= \frac{1}{12}(1 \times 1 \times 18 - 3 \times 1 \times 2) = 1 \\
 q_{B1} &= \frac{1}{12}(1 \times 1 \times 18 - 3 \times 1 \times 2) = 1, & q_{B2} &= \frac{1}{12}(1 \times 1 \times 18 + 3 \times 1 \times 2) = 2 \\
 q_{E1} &= \frac{1}{12}(1 \times 2 \times 18) = 3, & q_{E2} &= \frac{1}{12}(1 \times 2 \times 18) = 3
 \end{aligned} \tag{3-22}$$

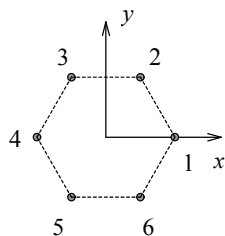
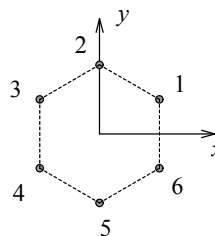
よって、可約表現は次式のように簡約される。

$$D = 2A_1 + A_2 + B_1 + 2B_2 + 3E_1 + 3E_2 \tag{3-23}$$

既約表現に従う基底を作成する。射影演算子は表現行列の内容が異なるのみで、(3-18)式と表現は同じである。

節点集合を構成している任意の節点 i の基底 u_{ix}, u_{iy}, u_{iz} を射影演算子に作用させ、各既約表現に属する合計 36 個のモードを抽出する。6 節点集合では節点の自由度が異なるため、これらのモードに零

モードや同じモードが複数含まれる。このため、(3-23)式で表される簡約した情報をもとに必要なモードを選択した。選択されたモードを Fig.3-9 に示す。

Fig.3-8 6 節点集合(σ_x 鏡映面上)Fig.3-10 6 節点要素(σ_y 鏡映面上)

A_1	A_2	B_1	B_2	E_1			E_2		

Fig.3-9 基底モード (6 節点集合(σ_x 鏡映面上))

■ 6 節点集合 (σ_y 鏡映面上)

節点番号を Fig.3-10 のように定める。この節点集合の各対称操作に対する表現行列は、次式で表される。

$$\begin{aligned}
 D(E) &= \begin{bmatrix} E & & & & & \\ & E & & & & \\ & & E & & & \\ & & & E & & \\ & & & & E & \\ & & & & & E \end{bmatrix}, & D(C_6^1) &= \begin{bmatrix} C_6^1 & & & & & \\ & C_6^1 & & & & \\ & & C_6^1 & & & \\ & & & C_6^1 & & \\ & & & & C_6^1 & \\ & & & & & C_6^1 \end{bmatrix}, & D(C_6^2) &= \begin{bmatrix} & & & & C_6^2 & \\ & & & & & C_6^2 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & C_6^2 \end{bmatrix} \\
 D(C_6^3) &= \begin{bmatrix} & & & C_6^3 & & \\ & & & & C_6^3 & \\ & & & & & C_6^3 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & C_6^3 \end{bmatrix}, & D(C_6^4) &= \begin{bmatrix} & & & & C_6^4 & \\ & & & & & C_6^4 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & C_6^4 \end{bmatrix}, & D(C_6^5) &= \begin{bmatrix} & & & & & C_6^5 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & C_6^5 \end{bmatrix} \\
 D(\sigma_x^1) &= \begin{bmatrix} & & & & & \sigma_x^1 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \sigma_x^1 & & & & & \end{bmatrix}, & D(\sigma_y^1) &= \begin{bmatrix} & & & & & \sigma_y^1 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \sigma_y^1 & & & & & \end{bmatrix}, & D(\sigma_x^2) &= \begin{bmatrix} & & & & & \sigma_x^2 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \sigma_x^2 & & & & & \end{bmatrix} \\
 D(\sigma_y^1) &= \begin{bmatrix} & & & & & \sigma_y^1 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \sigma_y^1 & & & & & \end{bmatrix}, & D(\sigma_x^3) &= \begin{bmatrix} & & & & & \sigma_x^3 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \sigma_x^3 & & & & & \end{bmatrix}, & D(\sigma_y^2) &= \begin{bmatrix} & & & & & \sigma_y^2 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ \sigma_y^2 & & & & & \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{3-24}$$

これら表現行列の指標は、次式で表せる。

$$\chi(E) = 3 \times 6 = 18, \quad \chi(C_6) = 0, \quad \chi(C_6^2) = 0, \quad \chi(C_6^3) = 0, \quad \chi(\sigma_y) = 2, \quad \chi(\sigma_x) = 0 \tag{3-25}$$

(3-15)式により、可約表現は次式のように簡約される。

$$D = 2A_1 + A_2 + 2B_1 + B_2 + 3E_1 + 3E_2 \tag{3-26}$$

これまでと同様に、射影演算子に任意節点の x,y,z 方向の単位ベクトルを作用させ、36個の既約表現に従うモードを作成する。これらのモードには零モードや同じモードが複数含まれているので、(3-26)式で表される簡約した情報をもとに必要なモードを選択した。選択されたモードを Fig.3-11 に示す。

A ₁	A ₂	B ₁	B ₂	E ₁			E ₂		

Fig.3-11 基底モード (6 節点集合(σ_y 鏡映面上))

■ 1 節点集合

1節点集合の場合、各表現行列は(3-11)式の行列と一致する。即ち次式となる。

$$\mathbf{D}(E) = \mathbf{E}, \quad \mathbf{D}(C_6^k) = C_6^k \quad (k = 1, \dots, 5), \quad \mathbf{D}(\sigma_x^k) = \sigma_x^k \quad (k = 1, 2, 3), \quad \mathbf{D}(\sigma_y^k) = \sigma_y^k \quad (k = 1, 2, 3) \tag{3-27}$$

これら表現行列の指標は次式となる。

$$\chi(E) = 3, \quad \chi(C_6) = 2, \quad \chi(C_6^2) = 0, \quad \chi(C_6^3) = -1, \quad \chi(\sigma_y) = 1, \quad \chi(\sigma_x) = 1 \tag{3-28}$$

(3-15)式により、可約表現は次式のように簡約される。

$$D = A_1 + E_1 \tag{3-29}$$

射影演算子に可約表現の x,y,z 方向の基底を作用させて抽出したモードを Fig.3-12 に示す。

A ₁	A ₂	B ₁	B ₂	E ₁		E ₂
$\uparrow z$				$\rightarrow x$	$\uparrow y$	

Fig.3-12 基底モード (1 節点集合(回転軸上))

3.2.2.2 剛性行列のブロック対角化

3.2.2.1 節で作成した既約表現に従うモードを利用して、構造物全体として $3N$ 個のモードを作成する。構造物の節点配置は、3.2.2.1 節で示した節点集合のいずれかに該当するので、Fig.3-7, Fig. 3-9, Fig.3-11, Fig.3-12 のモードを対応する節点に与えればよい。これら $3N$ 個のモードを正規化し既約

$\phi 89.1 \times 4.2$
 $A=11.2 \text{ cm}^2$
 $I=101 \text{ cm}^4$

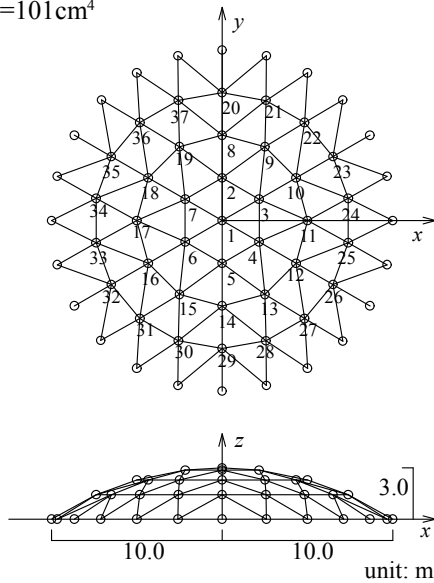
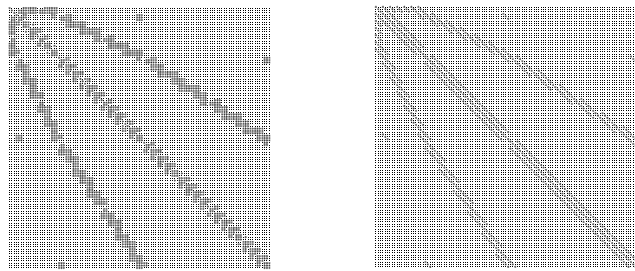
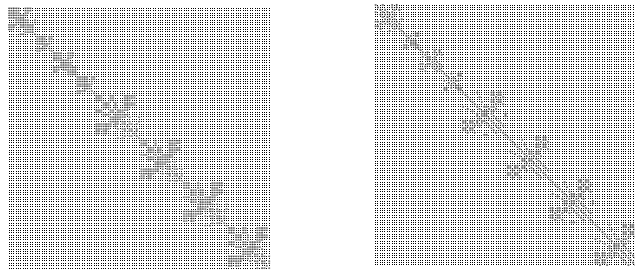


Fig.3-13 解析モデル



a: 線形剛性行列 b: 幾何剛性行列

Fig.3-14-1 剛性行列



a: 線形剛性行列 b: 幾何剛性行列

Fig.3-14-2 ブロック対角化された剛性行列

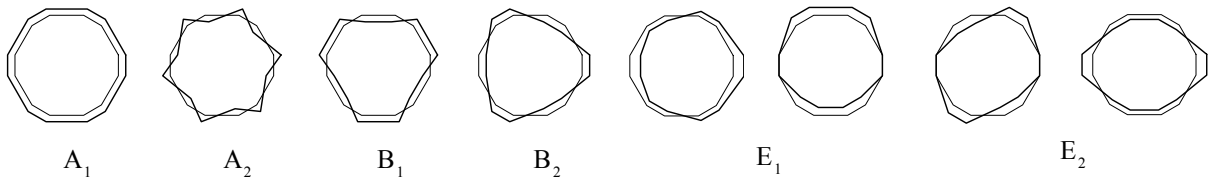


Fig.3-16 座屈モードの対称性

	A ₁	A ₂	B ₁	B ₂	E ₁		E ₂	
1st	3.788	7.464	3.360	5.425	4.305		3.946	
2nd	4.574	313.3	5.496	12.90	5.065		4.832	
3rd	5.995	333.3	6.190	546.9	6.895		6.422	
4th	8.139	347.9	13.65	612.1	8.041		6.653	

Fig.3-15 線形座屈荷重係数及び線形座屈モード

3.3 既約表現による重複固有値の分類

3.3.1 固有値の感度係数

最適化問題として離散構造物の最小固有値の最大化を行う場合、問題となるのは、最小固有値の感度が不連続となる点と、固有値が重複した場合の感度に関する点である。前者は、BFGS公式¹⁰⁾などを用いて2次の導関数を近似評価する際に問題となる。後者は、固有値が重複する際にモードの不定性により、次式で表される単根の固有値感度を適用できないという問題を生じる。

$$\lambda_{i,x} = -\phi_i^T [\mathbf{K}_{L,x} + \lambda_i \mathbf{K}_{G,x}] \phi_i / \phi_i^T \mathbf{K}_G \phi_i \quad (3-33)$$

ここに $(\cdot)_{,x}$ は設計変数 x による微分を意味する。

固有値が d 個重複する場合、固有モードは d 個の独立なベクトルの任意の線形結合として次式で表せる。

$$\phi_i = \beta_{i1} \bar{\phi}_1 + \beta_{i2} \bar{\phi}_2 + \cdots + \beta_{id} \bar{\phi}_d \quad (3-34)$$

上式をマトリクス表記して、次式で表す。

$$\phi_i = \bar{\Phi} \beta_i \quad (3-35)$$

(3-35)式を(3-33)式に代入して整理すると、重複固有値の感度は次式のような固有値問題の形式となる。

$$\left[\bar{\Phi}^T \{ \mathbf{K}_{L,x} + \lambda_i \mathbf{K}_{G,x} \} \bar{\Phi} + \lambda_{i,x} \bar{\Phi}^T \mathbf{K}_G \bar{\Phi} \right] \beta_i = \mathbf{0} \quad (3-36)$$

これは設計変数が1変数の場合の感度式であり、上問題を解くことで、重複固有値の感度は評価される。

設計変数が多変数の場合を考える。 M 個の設計変数を $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_M)$ と表し、設計変数の変化を $\mathbf{x} + \varepsilon \mathbf{e}$ と表す。ここに、 ε は設計変数の修正の大きさを表し、 $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_M)$ は修正の方向を表し $\|\mathbf{e}\| = \sqrt{e_1^2 + \cdots + e_M^2} = 1$ となるよう正規化されたベクトルとする。この場合の重複固有値の感度 λ'_i は、次の固有値問題を解くことにより求められる^{3),11)} ((3-36)式と比較すると理解が易い)。

$$\left[\bar{\Phi}^T \left\{ \sum_j^M (\mathbf{K}_{L,x_j} + \lambda_i \mathbf{K}_{G,x_j}) \mathbf{e}_j \right\} \bar{\Phi} + \lambda'_i \bar{\Phi}^T \mathbf{K}_G \bar{\Phi} \right] \beta_i = \mathbf{0} \quad (3-37)$$

上式[]内の第1項の行列は修正方向 \mathbf{e} の各成分 e_j に対して線形であるが、この問題を解くことで得られる固有値 λ'_i 及び固有モード β_i は一般に e_j に関して線形結合では表せない。従って、設計変数が多変数の場合、設計変数の修正方向が明らかでない限り、感度を評価することが困難となる。

$\bar{\Phi}^T \mathbf{K}_G \bar{\Phi} = \mathbf{I}$ となるように正規化されているものとする。この場合、1変数の重複固有値感度(3-36)式は、[]内の第1項の対角以外の項がゼロとなれば、第1項の対角項がそのまま固有値の感度となり、この感度は単根の固有値感度(3-33)式と一致する。これが全ての設計変数に対して成り立つ時、任意の修正方向 \mathbf{e} に対する重複固有値の感度 λ'_i は、単根の固有値感度の線形結合として $\lambda'_i = \lambda_{i,x_1} e_1 + \cdots + \lambda_{i,x_M} e_M$ のように表されることが、(3-37)式からわかる。従って、(3-33)式を用いて重複固有値の感度を評価するには、全ての設計変数に対して次式が成り立つ必要がある。

$$\bar{\phi}_k^T [\mathbf{K}_{L,x} + \lambda_l \mathbf{K}_{G,x}] \bar{\phi}_l = 0, \quad k \neq l \tag{3-38}$$

3.3.2 重複固有値の分類

境界条件や外力などが対称性を有する問題では、最適解も同様の対称性をもつことが予測できる。このため設計変数を予めグルーピングすることがよく行われる。この場合、設計変数の修正後においても構造物の対称性は保存され、基底モードを修正することなしに剛性行列は常にブロック対角化される。

固有値が重複する場合には、次の2つの場合が考えられる。

- 1) 同一のブロック行列における固有値が重複する場合
- 2) 異なるブロック行列間で固有値が一致する場合

1)に対してはさらに2つのケースに分けることができる。一つはブロック行列が二次元以上の既約表現によるものであり、対称性によって既約表現の次元の数だけ常に固有値が縮退する場合である (Fig. 3-17(a))。このような固有値の重複では、対称性が崩れるような設計変数の修正方向に対しては一般に(3-38)式は成立しない。しかし設計変数をグルーピングすることによって対称性が保存される場合、 $\mathbf{K}_{L,x}$ 、 $\mathbf{K}_{G,x}$ は剛性行列と同様の対称性を持つ。重複固有値の固有モードは(幾何)剛性行列を介して互いに直交化されているため、(3-38)式が成立し、感度は(3-33)式を用いて正しく評価される。(Kosaka et al ¹²⁾は、ある形式の重複固有値は、構造物の対称性を考慮することで単根の固有値感度式により評価可能であることを述べており、このケースに対応する。)

もう一つは同じ一次元既約表現に属する固有値(あるいは同じ二次元以上の既約表現に属する固有値で固有モードが共役の関係にないもの)が重複する場合である。多くの場合このようなケースは生じないものとする。同じ既約表現に属する固有値は、重複することなく互いに反発しあうような振舞いを示す傾向がある(Fig. 3-17(b))。簡単な例として Fig.3-18 に示すトラス構造物を例に挙げる。各節点に同じ大きさの鉛直荷重を与える。この構造物の表現行列を簡約すると $3A_1+A_2+B_1+2B_2+4E_1+3E_2$

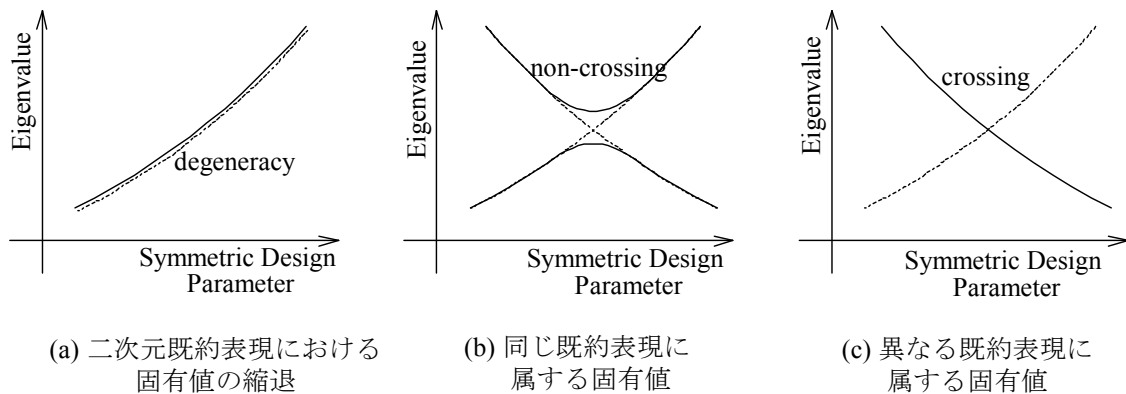


Fig. 3-17 対称構造物における固有値の性質

となる。節点1とグルーピングされた節点2～7のz座標を設計変数とし、構造材の体積を一定とする制約条件を与えると、線形座屈荷重と構造形状の関係は1変数で表現できる。節点1のz座標(ライズ)と線形座屈荷重値(固有値)の関係をFig. 3-20に示す。実線で描かれている2つの曲線は、既約表現 A_1 のブロック行列から得られる固有値のうち、小さい方から2つの固有値を表している。2つの固有値はライズが9cm付近で近づく傾向にあるが重複することはない。ライズ8cm, 9cm, 10cm付近での A_1 の固有モードをFig. 3-19に示す。固有モードはライズの変化に伴い大きく変化し、ライズが8cmと10cmにおける固有モードを比較すると、1番目と2番目のモードが互いに入れ替わっていることが確認できる。この例からわかるように、同じブロック行列内では基底に従属関係があるため、固有値の近接に伴い、固有モード間に遷移を生ずるものと考えられる。このような力学性状から、ここでは一次元既約表現のブロック行列内で固有値は重複しないと仮定する。(問題によっては同じ既約表現の固有値が重複する結果も見られる¹³⁾。ここでは部材剛性が比較的均一なドーム状構造物を解析対象とする。)

2)の場合の固有値の重複では、固有モードがそれぞれ異なる既約表現に属している。対称な設計変更に対しては、 $\mathbf{K}_{L,x}$, $\mathbf{K}_{G,x}$ は剛性行列と同様の対称性を持つため、(3-38)式が成立することは明らかである(Fig. 3-17(c))。

以上の結果から、構造形態の対称性が保存される場合、重複固有値の感度は(3-33)式を用いて評価することができる。固有値は既約表現により分類されているため、固有値の感度は連続関数として扱うことができる。最適化の際には全てのブロック行列の最小固有値に注目して、最小となるものを最大化をすればよい。Fig. 3-20で示した例では A_1-1 と B_2-1 が交わる8.3cm付近が最適解となる。

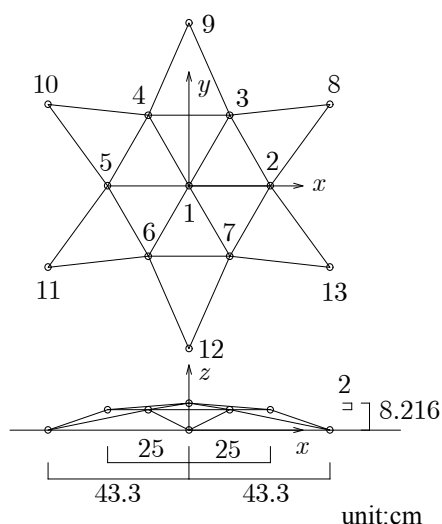


Fig. 3-18 トラス構造物

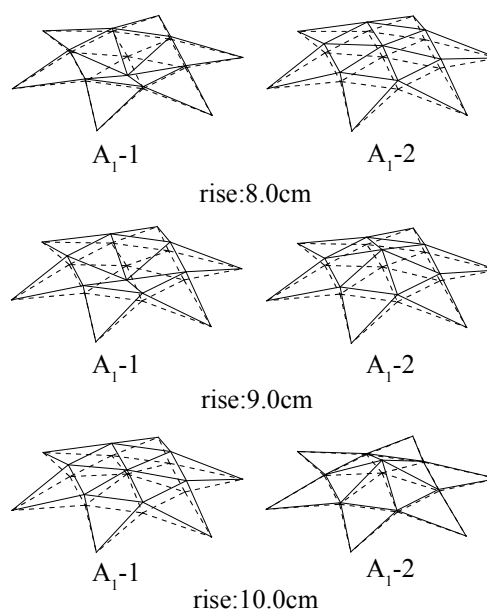


Fig. 3-19 モードの遷移

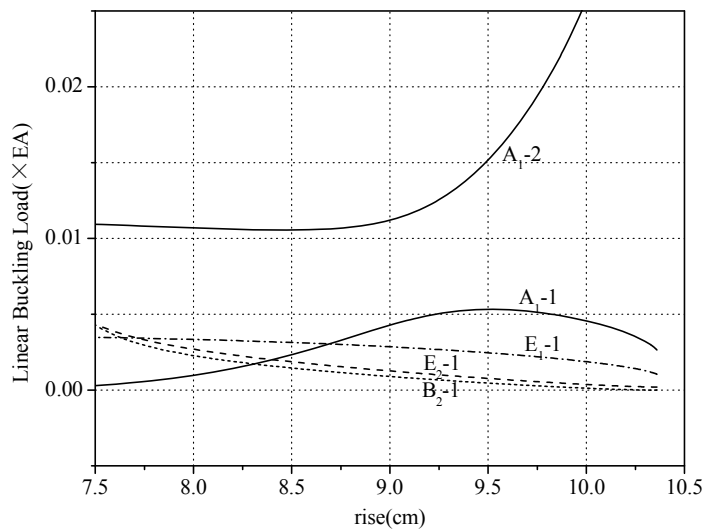


Fig. 3-20 ライズと線形座屈荷重の関係

3.4 最適化問題の定式化

最適化問題を設定する。構造材の体積が一定の条件のもとで、線形座屈荷重が最大となる構造形状を求める。構造物の形状は要素節点座標で表され、問題は線形座屈荷重を最大とする節点座標を求める問題として扱われる。ただし、初期形状として与えられた構造形状の対称性は保たれるものとする。

解析対象は鉛直荷重を受けるドーム状構造物とし、初期形状における線形座屈荷重係数(固有値)は全て正となる場合についてのみ考慮する。そしてこれら正の固有値が、負に転じる(座屈そのものを消失する)ことを許容しない。これは構造物の一部或いは全体が吊構造となることを避けるためである。

目的関数は初期形状の最小固有値が属する既約表現のブロック行列の最小固有値を最大化するものとし、他の既約表現のブロック行列の最小固有値がこれを上回るように制約条件を設定する。問題は次式のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \text{Objective Function: } & \lambda_1^{(\mu)} \rightarrow \text{Maximize} \\ \text{Subject to: } & \sum_{k=1}^M V_k = V_0 \\ & \lambda_1^{(\alpha)} \geq \lambda_1^{(\mu)} \quad (\alpha \in A) \end{aligned} \quad (3-39)$$

ここに λ は線形座屈荷重係数を表しており、上添え字は固有値の属する既約表現を表し、下添え字1はブロック行列の最小固有値であることを意味する。 μ は初期形状における最小固有値の属する既約表現を表す。 M は要素数、 V_k は k 番目要素の体積、 V_0 は指定した総体積、 A は既約表現の集合から μ を除いた集合で、点群 C_{6v} の対称性を有する構造物の場合、 $\{A_1, A_2, B_1, B_2, E_1, E_2\}$ から μ を除いた集合である。

ブロック対角化の際に用いる既約表現 A_1 に属する基底モードは構造形状と同じ対称性をもつ。このため、構造形状の修正において A_1 の基底モードを利用することができる。境界部を除く N 個の節点位置ベクトルの初期値を $\mathbf{r}^0 = \{\mathbf{r}_1^0, \mathbf{r}_2^0, \dots, \mathbf{r}_N^0\}^T$ と表し、初期値からの変化量を $\Delta\mathbf{r} = \{\Delta\mathbf{r}_1, \Delta\mathbf{r}_2, \dots, \Delta\mathbf{r}_N\}^T$ と表すものとする。構造形状は $\mathbf{r}^0 + \Delta\mathbf{r}$ として表される。 $\Delta\mathbf{r}$ を A_1 モードを用いて展開し次式で表す。

$$\Delta\mathbf{r} = \mathbf{H}^{(A_1)} \mathbf{x} \quad (3-40)$$

ここに \mathbf{x} は A_1 モードの重み係数のベクトルであり、これを設計変数として扱う。

問題は制約つき非線形最適化問題となる。最適化手法には逐次二次計画法を採用する。

3.5 数値解析

3.5.1 3変数モデル

比較的自由度の少ないモデルに提案手法を適用し、その有効性を確認する。初期形状はスパン15m、ライズ2.25mの球形単層トラスドームとする(Fig. 3-21)。設計変数は節点 z 座標とし、ここでは(3-40)式を利用せずに、通常的设计変数のグルーピングを施す。節点8~19の z 座標を変数 Z_1 、節点2~7の z 座標を Z_2 、節点1の z 座標を Z_3 と表し、合計3変数とする。各節点には鉛直方向に等しい大きさの外力を与える。制約条件である構造材の総体積は初期形状と同じ体積を指定する。また、各部材の個材座屈は考慮しない。

初期形状および最適化により得られた最終形状の節点 z 座標を Table 3-2 に示す。また両形状の線形座屈荷重値を、既約表現毎に小さいほうから2番目までの値を Table 3-3 に示す。表中に太字で示したものが、全体のうちで最小のものを表す。最終形状では A_1 と B_1 の既約表現の最小固有値が重複している。初期形状は解に近いので、形状、線形座屈荷重の変化は比較的小さかった。

このモデルの設計変数は3変数であり、構造材体積一定の制約条件によって線形座屈荷重値と構

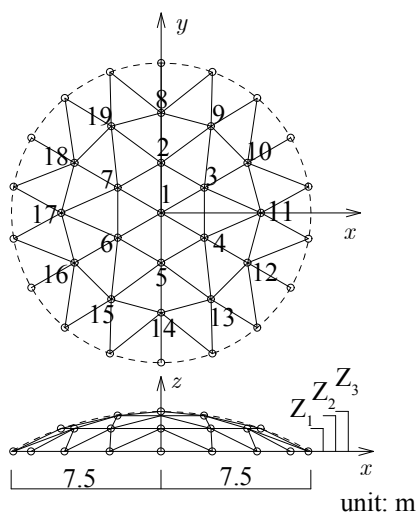


Fig. 3-21 3変数モデル

Table 3-2 節点 z 座標 (m)

	Z_1	Z_2	Z_3
Initial Shape	1.234	1.994	2.250
Final Shape	1.218	2.018	2.291

Table 3-3 線形座屈荷重値($\times 10^3EA$)

		Linear Buckling Load Factor						Volume (m ³)
		A ₁	A ₂	B ₁	B ₂	E ₁	E ₂	
Initial Shape	1st	2.471	123.1	2.453	5.547	3.807	2.918	209.803×A(m ²)
	2nd	3.843	133.5	5.475	256.5	3.872	4.512	
Final Shape	1st	2.676	123.6	2.676	4.591	3.012	3.041	209.803×A(m ³)
	2nd	3.307	137.5	4.801	252.0	4.298	3.841	

造形状の関係を2変数で表現できる。線形座屈荷重値（最小固有値）と構造形状の関係を等高線で Fig. 3-22 に示す。図中に○と記した領域は体積一定の制約条件を満たさない領域を表す。Sと記した領域は負の固有値が現れる領域で、本研究では設計領域から除かれる。その他の領域には最小固有値の属している既約表現を記入した。図中○印は先の最適化における初期形状の位置を、●印は最終形状の位置を示す。●印は等高線のピークに位置しており、良好な結果が得られていることがわかる。

任意の初期形状を与えることで、上述の解の他に2つの異なる解が得られた。これら2つの解を等高線図中に■印及び▲印で示す。■印で示した解は、B₁とE₁の最小固有値が重複する局所解である。▲印で示した解はA₁, B₁, E₁の最小固有値が重複するが、等高線図上では■印で示した解より低い位置にあり、最小固有値は極大値になっていない。目的関数として初期形状の最小固有値が属するブロック行列の固有値を最大化することとしたため、最小固有値がA₁に属する初期形状を与えた時に、この解が得られる場合がある。

固有値の性状を確認するために、Z₁を1.0m, 1.1m, 1.2mに固定した時のZ₂と固有値の関係をそれぞれ Fig. 3-23-a ~ c に示した。固有値の属する既約表現毎に線種を変えて描いており、同じ既約表現に属する固有値の曲線は交差していないことが確認できる。

3.5.2 12変数モデル

初期形状は3.2.3節で扱った、スパン20m、ライズ3mの球形単層トラスドームとする(Fig. 3-13)。部材の軸剛性は一律にEA=230.5kNとし、先と同様に個材座屈は考慮しない。外力はx-y平面に対して9.8kN/m²の等分布荷重を節点に振り分けて与える。制約条件である構造材の総体積は初期形状と同じ体積を指定する。

解析により得られた最終形状を Fig. 3-24-b に示す。また、比較のために初期形状を Fig. 3-24-a に示す。最終形状を見ると、節点の配置がパラレルラメラグリッドから3方向グリッドへ移行し、部材が曲線的に配置されることによりライズは3.52mに上昇している。最終形状の対称性は初期形状と同じ点群C_{6v}に該当し、対称性に変化は見られない。初期形状及び最終形状の節点座標を Table 3-4 に、線形座屈荷重係数の値を、既約表現毎に小さいほうから2番目までの値を Table 3-5 に示す。

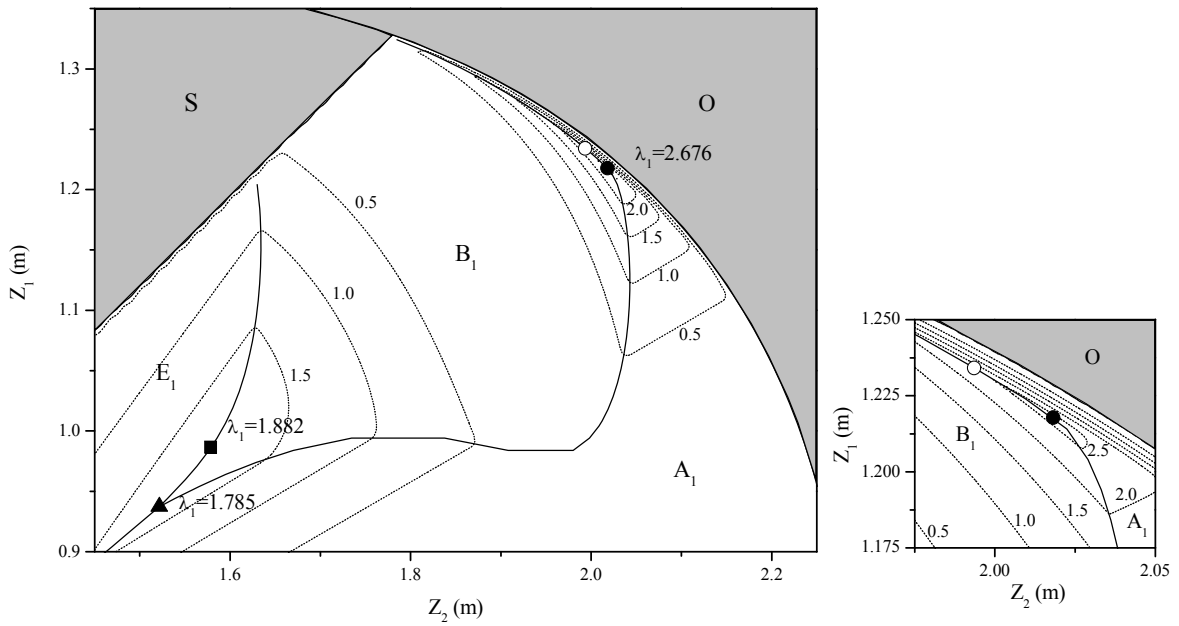


Fig. 3-22 最小固有値の等高線図 ($\times 10^3 EA$)

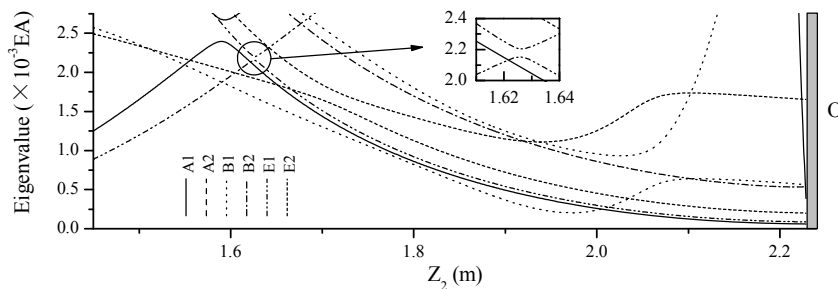


Fig. 3-23-a 固有値と Z_2 の関係 ($Z_1=1.0$ m)

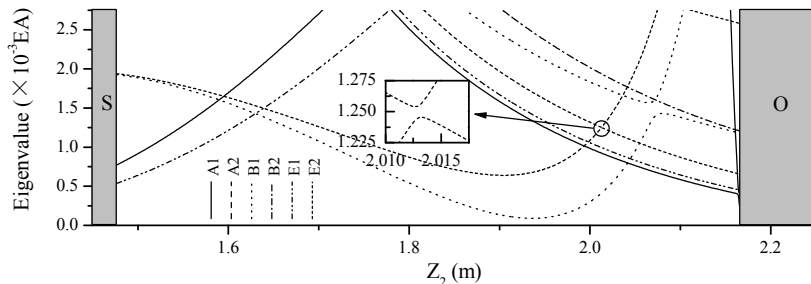


Fig. 3-23-b 固有値と Z_2 の関係 ($Z_1=1.1$ m)

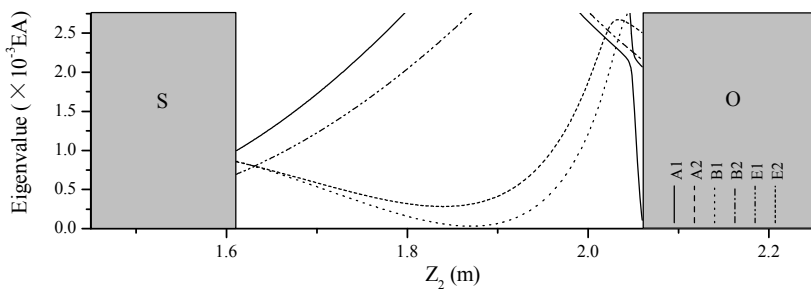


Fig. 3-23-c 固有値と Z_2 の関係 ($Z_1=1.2$ m)

初期形状では B_1 における最小固有値 3.36 が全体の最小座屈である。最終形状では A_1 と B_1 の最小固有値が重複し、その値は 6.53 と初期形状に比べおよそ 2 倍に上昇した。

各ブロック行列における最小固有値に対応する固有モードを Fig. 3-25 に示した。単層トラスドームの座屈性状は、1 節点とその周辺節点から成る単位ドームとしての座屈が支配的であることが知られている¹⁴⁾。座屈荷重の大きい形状とは、座屈モードに対し剛性の高い形状であることを意味する。最終形状では各単位ドームの半開角が大きくなるような形状が得られており、解の妥当性が確認できる。

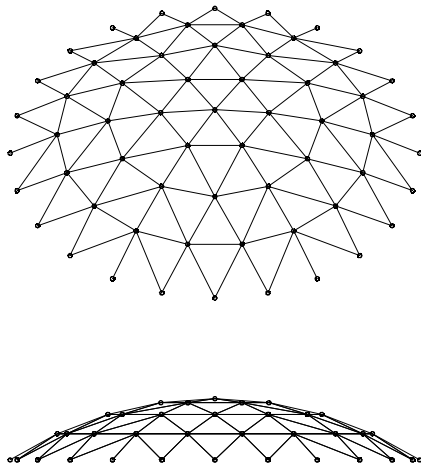


Fig.3-24-a 初期形状

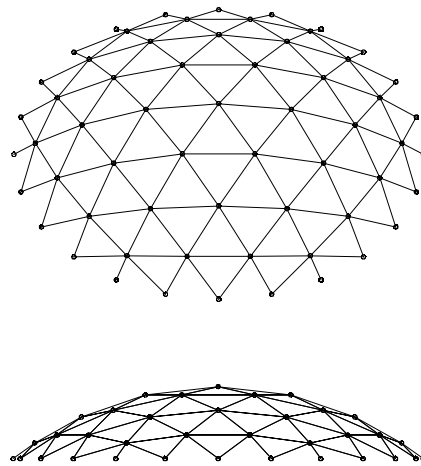


Fig.3-24-b 最終形状

Table3-4 節点座標

	Initial Shape			Final Shape		
	x	y	z	x	y	z
node1	0.0000	0.0000	3.0000	0.0000	0.0000	3.5217
node2	0.0000	2.6380	2.8074	0.0000	3.5462	3.1150
node8	0.0000	5.2202	2.2338	0.0000	6.6716	2.0408
node9	2.6101	4.5208	2.2338	2.9586	5.1244	2.3652
node20	0.0000	7.6916	1.2914	0.0000	8.9558	0.7708
node21	2.6307	7.2277	1.2914	2.7624	7.8646	1.1517

Table3-5 線形座屈荷重係数及び総体積

		Linear Buckling Load Factor						Volume (m ³)
		A ₁	A ₂	B ₁	B ₂	E ₁	E ₂	
Initial Shape	1st	3.788	7.464	3.361	5.425	4.305	3.946	386.415×A(m ²)
	2nd	4.574	313.3	5.496	12.90	5.065	4.832	
Final Shape	1st	6.530	9.214	6.530	8.750	7.053	7.081	386.415×A(m ²)
	2nd	8.256	414.0	8.371	17.24	7.876	7.763	










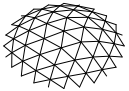









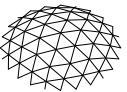





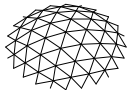
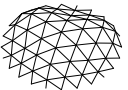
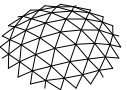



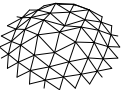
	A ₁	A ₂	B ₁	B ₂	E ₁	E ₂
1st	 6.530	 9.214	 6.530	 8.750	  7.053	  7.081
2nd	 8.256	 414.0	 8.371	 17.24	  7.876	  7.763
3rd	 8.912	 450.7	 9.054	 549.8	  9.261	  9.003
4th	 11.64	 498.8	 18.80	 645.0	  11.04	  11.01

Fig.3-25 最終形状の線形座屈モード

座屈前変形の影響を調査するため、初期形状及び最終形状に対して改めて幾何学的非線形解析を行い、非線形座屈荷重の算定を行った。解析結果を Table 3-6 に示す。初期形状と最終形状の非線形座屈荷重係数はそれぞれ 2.57(線形座屈荷重係数の 77%)と 5.35(線形座屈荷重係数の 82%)であり、非線形座屈荷重に関しても 2 倍程度上昇している。また同表中には個材座屈荷重($F=240\text{N/mm}^2$)も示した。実際には初期形状、最終形状ともに、個材座屈が非線形座屈より先行している。最終形状の個材座屈は、部材長の比較的長い部材を生じているために、初期形状に比べて 2 割程度小さくなっている。しかし、部材の細長比や応力に関する制約条件を導入することで、初期形状に対する個材座屈荷重の低下を制御することは可能であると考えられる。

全体座屈は、個材座屈に比べ形状不整、荷重不整に対し極めて敏感であり、小さな不整によって座屈荷重が半分以下になるようなことも少なくない。先の初期形状、最終形状に対し、初期不整による非線形座屈荷重の低下を検討した。初期形状に対しては全節点を通る球面の曲率中心方向に向かい特定の 1 節点に形状不整を与える。最終形状に対しては、各節点は同一球面上には存在しないが、その差は小さいため、同サイズの球殻の曲率中心方向に形状不整を与えるものとした。不整量と非線形座屈荷重係数(全体座屈)の関係を図 3-26 に示す。同図中には個材座屈の値を水平点線で示した(個材座屈も不整の影響を受けるが、その影響は小さいため一定値で示した)。初期形状では不整が 5cm 付近で全体座屈が個材座屈を下回るが、最終形状では 9cm 付近となる。個材座屈が先行する場合においても、非線形座屈荷重の不整による急激な低下を見込んで、支配的な荷重分布に対し全体座屈荷重を高めておくことは有効であると考えられる。

Table 3-6 座屈荷重係数

	Nonlinear Buckling	Linear Buckling	Member Buckling
Initial Shape	2.573	3.361	0.886
Final Shape	5.352	6.530	0.710

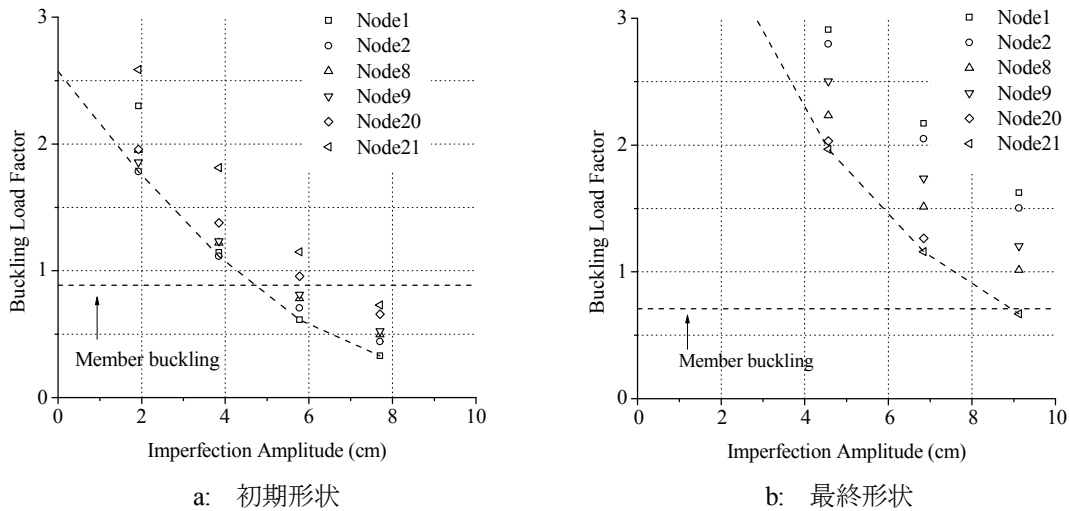


Fig.3-26 形状初期不整量と非線形座屈荷重係数の関係

3.6 3章のまとめ

線形座屈荷重を目的関数とした単層トラスドームの形状最適化問題を扱った。この種の問題では、最適解で複数の固有値が重複し、感度を評価することが困難となる場合がある。このため、群論の知見を援用して、予め固有値問題をトラスドームの対称性によって可能な限り独立な方程式に分解した（ブロック対角化）。最適化により固有値が重複する場合について検討を行った。その結果、構造物の対称性が変化しない場合、最適化によって生ずる固有値の重複は、主に対称性によって分離される異なるグループ（既約表現）間での固有値の一致であり、同じグループ内では、対称性によって常に固有値の重複を生ずるグループ（2次元既約表現）を除き、固有値の重複は生じない傾向があることを確認した。

最適解のもつ対称性は、与えられる境界条件や荷重条件から、殆どの場合予測可能である。解の対称性を予め考慮し、剛性行列をブロック対角化することによって、単根の固有値感度式を適用することが可能となり、感度解析手法に基づく従来の非線形計画法を用いて解を求めることが可能となる。

これら一連の考え方を、点群 C_{6v} の対称性を有する単層トラスドームの形状最適化問題に適用し、良好な数値解析結果を示すことで、本手法の有効性を確認した。

4. まとめ

第Ⅱ部では、最適化手法を利用して、座屈荷重を最大とする曲面構造の架構形状を求める問題を扱った。各章の内容は次のようにまとめられる。

1章は、アーチの形状最適化問題を扱った。アーチ形状と外力分布はともに左右対称とし、座屈前変形を伴う対称分岐型の座屈を対象とした。幾何学的非線形解析には、最適化過程の不整形な形状に対しても精度良く座屈荷重を評価するために、移動座標系による定式化を行った。また、分岐座屈荷重の感度解析に対し、構造形状の対称性を考慮した定式化を行った。数値解析では、外力分布、支持条件の違いによる最適形状の相違について調査し、固定支持の場合には、境界付近で曲線の勾配が零となるような最適形状が得られることを示した。また、最適形状の不整に対する性状について調査を行い、特別な不整敏感性は有していないことを示した。

2章は、二方向格子シェルを解析対象として座屈荷重の最大化を行った。この問題では最適解で座屈荷重の重複を生じる傾向があり、非線形座屈荷重を厳密に最大化することは困難となる。この為、最適化方法について次の工夫を行った。

- ・ 臨界点の消失や感度解析の煩雑さを回避するための方法として、指定変位ノルムをもつ釣合点で固有値解析を行う非線形座屈荷重の近似評価法とその感度解析手法を提案した。
- ・ 座屈荷重感度が設計変数に対して連続となるようモードの連続性を評価し、座屈荷重の重複を考慮した最適化問題の設定を行った。
- ・ 座屈荷重が重複或いは近接した際に、単根の感度式で正確に評価できていることの確認を行った。

数値解析例では、非線形座屈荷重のほぼ重複した結果が得られ、手法の有効性を確認した。また、この最適形状の力学性状について調査を行い、曲げモーメントの発生が比較的大きいこと、座屈荷重が重複することにより極端な不整敏感性を有する構造物となっていることを明らかにした。

3章は、2章で不十分であった最適解で重複固有値を生ずる問題を解く為の新しい方法として、構造物の対称性を利用する方法を検討した。基礎的な検討を行うために最適化問題は単純なものとし、単層トラスドームの線形座屈問題を扱った。対称性を数学的に扱う群論の知識を援用して、剛性行列のブロック対角化を行い、各々の座屈荷重を座屈モードのもつ対称性に従って分類した。この分類を利用して、座屈荷重（固有値）の重複の形式と、単根の固有値感度式が適用可能となる場合について整理した。その結果、最適化によって生ずるのは主に異なる対称成分における重複であり、単根の固有値感度式を用いて最適化を行うことが可能であることを示した。具体的な最適化方法と例題を示し、手法の有効性を確認した。

第II部では数値解析例が少なく、座屈荷重と構造形状の傾向の把握に関しては今後の研究によるところが大きいですが、本論文で得られた主な知見として以下のものが挙げられる。

- 1) 座屈荷重の大きい形状は、曲げモーメントの発生を抑制するような形状と必ずしも同じ傾向にない。
- 2) 座屈荷重を目的関数として最適化を行うと、複数のモードの座屈荷重が重複し、不整に敏感な構造物となる場合がある。
- 3) 直線材で構成される離散的曲面構造において、座屈荷重を目的関数とした形状最適化によって引き起こされる座屈荷重の重複は、主に異なる対称成分（既約表現）に属するモードの座屈荷重の一致である。

比較的大きな応力を生じ、座屈前変形が大きな場合においても、安定性の高い場合がある。この為、実際の設計計画に反映可能な形状を得るには、問題に応じて、応力に関する制約や材料非線形性を考慮する必要を生じる。

2)に関して言えば、座屈荷重が重複することによって、常に不整に敏感となる傾向があるのか否かは明らかでなく、そのメカニズムを明確にしていく必要がある。曲面構造では荷重レベルの狭い範囲に数多くの座屈モードを持つため、設計過程を通して偶然に座屈荷重が重複するケースも十分考えられる。仮に、座屈荷重の重複或いは近接が不整感性を生む主要な要因となるのであれば、ロバスト性を確保するために座屈荷重を上昇させるよりも特定のモードの座屈を先行させるような形状決定の方が有効な場合も考えられる。

結論

力学的に合理的な曲面を数値解析により生成することを目標とし、その基礎的研究として第Ⅰ部では「曲げモーメント分布」を、第Ⅱ部では「座屈」を目的関数としてそれぞれ曲面構造の形状最適化を行った。第Ⅰ部では、軸対称シェル、点支持された自由曲面シェル、スペースフレームを解析対象とし、第Ⅱ部では、アーチ、格子シェル、トラスドームを解析対象とした。これらの様々な数値解析から得られる最適形状の力学性状を調査することで、曲面形状が曲げモーメント分布や座屈に与える影響の一部を明らかにしてきた。本論文を通して得られた主な知見は、次のようにまとめられる。

曲げモーメント分布最小曲面

- 1-1) 曲面構造の境界付近に発生する局所的な曲げモーメントの分布は、形状の比較的小さな差異によって大きく変化する (I. 2章)。従って、応力の低減を目的として曲面形状を決定を行った場合、形状不整による応力の変化を調査し、実質的な効果の有無を十分に把握する必要がある。
- 1-2) 自重に対して曲げモーメントを発生しない形状は、唯一ひとつでなく、膜力の立体的な流れに応じた様々な形状が存在する場合がある (I. 3章)。この場合、デザインや短期外力に対する抵抗性など、他の要求に応じて形状を選択することができる。
- 1-3) スペースフレームのような離散的な曲面構造では、曲面形状以外に、曲面の分割パターンも曲げモーメントの分布に大きく寄与する (I. 4章)。軸力が円滑に支持部に伝達されるよう立体交差アーチによって構成される曲面分割が効果的であると言えるが、本文中で示したような軸力の流れの複雑な分割パターンを採用することもできる。

座屈荷重最大曲面

- 2-1) 座屈荷重の大きい形状は、曲げモーメントの発生を抑制するような形状と必ずしも同じ傾向にない (II. 1章、II. 2章)。比較的大きな座屈前変形を伴いながら、高い安定性を示す場合がある。
- 2-2) 座屈荷重を目的関数として最適化を行うと、複数のモードの座屈荷重が重複し不整に敏感な構造物となる場合がある (II. 2章)。この為、実用的な構造形状を得るには不整の影響を考慮することが望ましい。
- 2-3) 直線材で構成される離散的な曲面構造において、座屈荷重を目的関数とした形状最適化によって引き起こされる座屈荷重の重複は、主に異なる対称成分 (既約表現) に属するモードの座屈荷重の一致である (II. 3章)。この傾向を利用することで、従来の非線形計画法を用いて座屈荷

重の重複した解を求めることができる。

曲げモーメントは材料の塑性化を引き起こす主要な応力成分であり、座屈は材料強度とは無関係に変位の増大を引き起こし構造物に損傷を与える。本論文で扱った二つの形状決定法の適用性について言えば、一般に、曲面構造は扁平或いは曲げ剛性が小さい（座屈モードに対し剛性が低い）ほど座屈を生じやすい。従って、このような場合には座屈に対して抵抗性の高い形状を採用するのが良いと言える。逆にある程度のライズを有し十分な曲げ剛性を持つ場合においては、曲げモーメントの発生を抑えた形状を採用することが効果的である。しかし構造形態の変化は勿論これら二つの力学応答に同時に影響を与えるため、他方の非線形挙動の影響を受けない範囲内において有効である。どちらの影響も無視できない複合的な崩壊挙動を示す場合には、これらを同時に考慮した問題設定を必要とする。こうした煩雑な問題では、本論文で用いたような非線形計画法の適用が困難となる為、遺伝的アルゴリズム等のヒューリスティックな手法を用いるのが有効であると考えられる。

ただし、本論文では座屈に対する最適化例は少なく、その有効性については十分に明らかにしていない。例えば座屈モードが波長の短い場合や局所的な場合に、曲率分布の修正によって座屈に対する大きな抵抗性が得られるかについては疑問である。また、与えられた外力に対し曲げを生じない形状を採用した場合、その外力に対する座屈挙動は、座屈前変形を殆ど伴わない為、線形座屈問題として正確にモデル化できる。この為、支配的な設計外力に対し座屈によって耐力が決まる場合においても、曲げの発生しない形状を採用し、座屈に対する抵抗性は曲面形状でなく、単純に厚さ、リブ、複層化等の断面形状に期待するほうが力学的にシンプルである。

論文全体を通し、最適化問題により得られた最終形状は、初期形状の幾何学関数で与えられた形状に対して視覚的な変化が比較的小さいにも関わらず、その力学挙動の変化は、設計を行う上で小さいとは言えない結果が幾つか見られた (1-1), 2-2))。コンピュータによる構造解析を中心とする現代の構造設計において、こうした性状には十分な注意が必要であると考えられる。

以上、本研究は、曲面構造の力学的に合理的な架構形状を数値解析により決定するための基礎的研究として、静的外力作用下の曲げモーメント分布と座屈の二つの力学応答をそれぞれ目的関数とした曲面構造の形状最適化問題を扱い、これらの問題から得られる最適形状の力学性状を詳細に調査することで、曲面形状がこれらの力学応答に与える影響や効果の一部を明らかにした。

参考文献

序論 参考文献

- 1) H. Isler : Generating Shell Shapes by Physical Experiments, Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS), Vol. 34, pp. 53-63, 1993
- 2) F. Otto et al : NATURLICHE KONSTRUKTIONEN, Deutsche Verlags-Anstalt GmbH, 1982 (japanese translation)
- 3) M. Milankovic : O membranama jednakog otpora, Rad. Jugoslovenske Akademije, Zagreb, Vol. 175, 1980, pp.140-152
- 4) W. Fulluge : Statik und Dynamik der Schalen, Berlin Verlag von Julius Springer,1934 (japanese translation)
- 5) C. B. Biezeno : Bijdrage tot de berekening van ketelfronten, de Ingenieur, Vol. 37, 1922, pp. 781
- 6) R. A. Struble : Biezeno Pressure Vessel Heads, J. Appl. Mech., Vol. 23, 1956, pp. 642-645
- 7) E. H. Brown : The Minimum Weight Design of Closed Shells of Revolution, Quart. J. Mech. and Appl. Math., Vol. 15, 1962, pp. 109-128
- 8) P. G. Smith, E. L. Wilson : Automatic Design of Shell Structures”, ASCE, J. Struct. Div., Vol. 97, No. 1, pp. 191-201, 1971
- 9) M. R. Horne : Shells with Zero Bending Stresses, J. Mech. and Physics of Solids, Vol. 2, No. 2, 1954, pp. 117-126
- 10) P. Pedersen : On the Minimum Mass Layout of Trusses, AGARD Conference Proceeding, No. 36, 1970
- 11) Ph. Trompette, J. L. Mercelin : On the choice of the objectives in shape optimization, Engineering Optimization, 11, (1/2), pp.92-109, 1987
- 12) L. Younsheng : Sensitivity Analysis in Shape Optimization Design for a Pressure Vessel, Int. J. Pres. Ves. & Piping, 49, 1992, pp.387-397
- 13) J. I. Barbosa, C. M. Sores, C. A. M. Sores : Sensitivity Analysis and Shape Optimal Design of Axisymmetric Shell Structures, Computing Systems in Engineering, Vol.2, No. 5-6, pp. 525-533, 1991
- 14) E. Ramm : Shape Finding Methods of Shells, Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS), Vol. 33, pp. 89-99, 1992
- 15) E. Ramm, G. Mehlhorn : On shape finding methods and ultimate load analyses of reinforced concrete shells, Eng. Struct. , Vol. 13, pp. 178-198, 1991
- 16) E. Hinton, N. V. R. Rao : Structural Shape Optimization of Shells and Folded Plates using Two-noded Finite Strips, Computers & Structures, Vol. 46, No. 6, pp.1055-2072, 1993
- 17) M. Feigen : Minimum Weight of Tapered Round Thin-Walled Columns, J. Appl. Mech., Vol. 19, No. 3, 1952,

- pp. 375-380
- 18) F. Shanley : Weight-Strength Analysis of Aircraft Structures, Dover, New York, 1960
 - 19) M. Zyczkowski, J. Kruszecki : Optimal Design of Shells with Respect to their Stability, Proc. IUTAM Symposium on Optimization in Structural Design, edited by A. Swawczuk and Z. Mroz, Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1975, pp. 229-247
 - 20) I. Tadjbakhsh, J. B. Keller : Strongest Columns and Isoperimetric Inequalities for Eigenvalues, Trans ASME, J. Appl. Mech., 29, pp. 159-164, 1962
 - 21) N. Olhoff, S. H. Rasmussen : On Single and Bimodal Optimum Buckling Loads of Clamped Columns, Int. J. Solids Structures, Vol. 13, pp. 605-614, 1977
 - 22) V. N. Solodovnikov : Optimization of Elastic Shells of Revolution, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 43(3), pp.535-544, 1978
 - 23) R. H. Plaut, N. Olhoff : Optimal Forms of Shallow Arches with Respect to Vibration and Stability, J. Struct. Mech., 11(1), pp. 81-100, 1983
 - 24) R. H. Plaut, L. W. Johnson : Optimal Forms of Shallow Shells with Circular Boundary, J. Appl. Mech., Vol.51, pp. 527-539, 1984
 - 25) R. Reitingger, E. Ramm : Buckling and Imperfection Sensitivity in the Optimization of Shell Structure, Thin-Wall Structures 23, pp.159-177, 1995
 - 26) 陳沛山, 川口衛 : スペース・フレームの最大座屈荷重形態, 日本建築学会構造系論文集, 第489号, pp.41-46, 1996
 - 27) 小河利行, 大崎純, 立石理恵 : 線形座屈荷重最大化と部材長一様化を目的とした単層ラチスシェルの形状最適化, 日本建築学会構造系論文集, 第570号, pp.129-136, 2003
 - 28) T. Akerstrom, C. Jernstorm, T. Wierzbicki : Shape Optimization of Sheet Metal Structures against Crash, Fourth International Conference on Vehicle Structural Mechanics, Detroit, MI, 1981, pp.129-139
 - 29) J. Kruszecki, M. Zyczkowski : Optimal Structural Design of Shells - A Survey, SM Archives, 10, pp. 101-170, 1985
 - 30) 構造形態の解析と創生, 日本建築学会応用力学運営委員会, 構造形態の解析と創生小委員会, 1995

第 I 部 参考文献

- 1) H. Isler : Generating Shell Shapes by Physical Experiments, Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS), Vol. 34, pp. 53-63, 1993
- 2) O. A. Andres, N. F. Ortega : An Extension of Gaudi's Funicular Technique to the Conception of Structural Surfaces, Bulletin of the International Association for Shell and Spatial Structures (IASS), Vol. 35, pp. 161-172, 1994
- 3) E. Ramm : Shape Finding Methods of Shells, Bulletin of the International Association for Shell and Spatial

Structures (IASS), Vol. 33, pp. 89-99, 1992

- 4) 大森博司, 大木洋司, 中増裕介 : 吊り下げ曲面の形状解析, 日本建築学会構造系論文集, No. 468, pp.109-118, 1995.2
- 5) 吉中進, 川口健一, 半谷裕彦 : 懸垂型シェルの形状決定法に関する研究, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北海道), 構造 I, pp. 561-562, 1995
- 6) 茨木俊秀他 : FORTRAN77 最適化プログラミング, 岩波書店, 1991
- 7) 山川宏 : 最適化デザイン, 培風館, 1993
- 8) 鷺津久一郎他 : 有限要素法ハンドブック I, 培風館, 1981
- 9) 杉原厚吉 : グラフィックスの数理, 共立出版, 1995
- 10) 都鎮洙, 川口衛 : 空間構造における曲げ剛性の影響, 日本建築学会構造系論文集, No. 434, pp.87-95, 1992.4
- 11) E. Ramm, G. Mehlhorn : On shape finding methods and ultimate load analyses of reinforced concrete shells, Eng. Struct. , Vol. 13, pp. 178-198, 1991
- 12) E. Ramm, R. Reitingger : Force Follow Form in Shell Design, Proceedings of IASS on Innovative Large Span Structures, Vol.1, pp. 11-27, 1992

第 II 部 1章 参考文献

- 1) C. H. Wu : The Strongest Circular Arch - A Perturbation Solution, Journal of Applied Mechanics, 35, (3), pp. 476-480, 1968
- 2) B. Budiansky, J. C. Frauenthal and J. W. Hutchinson : On Optimal Arches, Journal of Applied Mechanics, 36, (4), pp. 880-882, 1969
- 3) J. C. Amazigo : Optimal Shape of Shallow Circular Arches Against Snap-Buckling, Journal of Applied Mechanics, 45, (3), pp. 591-594, 1978
- 4) W. Stadler : Stability of the Natural Shapes of Sinusoidally Loaded Uniform Shallow Arches, Q. Jl. Mech. Appl. Math., Vol. 36, Pt. 3, pp. 365-386, 1983
- 5) I. G. Tadjbakhsh : Stability and Optimum Design of Arch-Type Structures, Int. J. Solids Structures, Vol. 17, pp. 565-574, 1981
- 6) J. Blachut and A. Gajewski : Unimodal and Bimodal Optimal Design of Funicular Arches, Int. J. Solids Structures, Vol. 17, pp. 653-667, 1981
- 7) R. H. Plaut, N. Olhoff : Optimal Forms of Shallow Arches with Respect to Vibration and Stability, J. Struct. Mech., 11(1), pp. 81-100, 1983
- 8) 佐藤稔夫, 中村恒善 : 新建築学体系36 骨組構造の解析, 彰国社, 1982
- 9) 鷺津久一郎他 : 有限要素法ハンドブック II, 培風館, 1981
- 10) J. T. Thompson : A General Theory for the Equilibrium and Stability of Discrete Conservative Systems, ZAMP,

Vol.20, pp.797-847, 1969

- 11) J. Roorda : On the Buckling of Symmetric Structural Systems with First and Second Order Imperfections, Int. J. Solids Structures, Vol. 4, pp. 1137-1148, 1968
- 12) 細野透 : 弧長法による弾性座屈問題の解析 (その1) 座屈点における増分解の性質, 日本建築学会論文報告集, No. 242, pp.41-49, 1976
- 13) 細野透 : 弧長法による弾性座屈問題の解析 (その2) 数値解析法としての弧長法, 日本建築学会論文報告集, No. 243, pp.21-30, 1976
- 14) Timoshenko and Woinowsky-Krieger : Thory of Plates and Shells, McGRAW-HILL, 1959 (Japanese Translation)

第Ⅱ部 2章 参考文献

- 1) R. H. Plaut, N. Olhoff : Optimal Forms of Shallow Arches with Respect to Vibration and Stability, J. Struct. Mech., 11(1), pp. 81-100, 1983
- 2) R. Reitinger, E. Ramm : Buckling and Inperfection Sensitivity in the Optimization of Shell Structure, Thin-Wall Structures 23, pp.159-177, 1995
- 3) 陳沛山, 川口衛 : スペース・フレームの最大座屈荷重形態, 日本建築学会構造系論文集, 第489号, pp.41-46, 1996
- 4) J. M. T. Thompson, G. W. Hunt : A General Theory of Elastic Stability, J. Wiley, 1973
- 5) J. Roorda : On the Buckling of Symmetric Structural Systems with First and Second Order Imperfections, Int. J. Solids Structures, Vol. 4, pp.1137-1148, 1968
- 6) A. P. Seyranian, E. Lund, N. Olhoff : Multiple eigenvalues in structural optimization problems, Structural Optimization 8, pp.207-227, 1994
- 7) M. K. H. Fan, B. Nekoie : On Minimizing the Largest Eigenvalue of a Symmetric Matrix, Linear Algebra and Its Applications 214, pp.225-246, 1995
- 8) M.Ohsaki : Optimization of Geomrtrically Non-linear Symmetric Systems with Coincident Critical Points, Int J. Numer. Methods Engng, 48, pp. 1345-1357, 2000
- 9) 寒野善博, 大崎純, 藤澤克樹, 加藤直樹 : 半正定値計画法を用いた指定座屈荷重係数を有するトラストポロジー最適化, 日本建築学会構造系論文集, No.541, pp.113-119,2001
- 10) H. Noguchi, T. Hisada : Sensitivity Analysis of Critical Load Factor for Nonlinear Structural Systems, Computers & Structures, Vol.47, No.4/5, pp.699-710, 1993
- 11) M. Ohsaki, K. Uetani : Sensitivity Analysis of Bifurcation Load of Finite-Dimensional Symmetric Systems, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol 39, pp.1707-1720, 1996
- 12) Y. X. Gu, G.Z. Zhao, H. W. Zhang, Z. Kang, R. V. Grandhi : Buckling design optimization of complex built-up structures with shape and size variables, Struct Multidisc Optim 19, pp.183-191, 2000

- 13) M.F.Yang, C.C.Liang : A Rational Shape Design of Externally Pressurized Torispherical Dome Ends under Buckling Constraints, *Computers & Structures*, Vol.43, No.5, pp.839-851, 1992
- 14) 銭志偉, 半谷裕彦 : シェル構造の座屈荷重の感度係数と最小重量設計法, 日本建築学会大会学術講演梗概集, B-1, pp.1009-1010, 1997
- 15) M. P. Kamat, P. R. Ruangsilasingha : Optimization of Space Trusses Against Inb Stability Using Design Sensitivity Derivatives, *Eng. Opt.*, Vol. 8, pp.177-188, 1985
- 16) N. S. Khot, M. P. Kamat : Minimum Weight Design of Truss Structures with Geometric Nonlinear Behavior, *AIAA Journal*, vol. 23, No. 1, 1985
- 17) Robert Levy, Huei-Shiang Perng : Optimization for Nonlinear Stability, *Computers & Structures*, Vol. 30, No. 3, pp.529-535, 1988
- 18) R. Levy : Optimal Design of Trusses for Overall Stability, *Computers & Structures*, Vol. 53, No. 5, pp.1133-1138, 1994
- 19) R. Levy : Optimization for Buckling with Exact Geometries, *Computers & Structures*, Vol. 53, No. 5, pp.1139-1144, 1994
- 20) R. Sedaghati and B. Tabarrok : Optimum design of truss structures undergoing large deflections subject to a system stability constraint, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol 48, pp.421-434, 2000
- 21) Y. Kanno, M. Ohsaki : Necessary and Sufficient Conditions for Global Optimality of Eigenvalue Optimization Problems, *Struct Multidisc Optim* 22, pp.248-252, 2001
- 22) 茨木俊秀他 : FORTRAN77 最適化プログラミング, 岩波書店, 1991

第Ⅱ部 3章 参考文献

- 1) E. F. Masur : Optimal structural design under multiple eigenvalue constraints, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 20, No. 3, pp. 211-231, 1984
- 2) E. J. Haug, K. K. Choi : Systematic occurrence of repeated eigenvalues in structural optimization, *Journal of optimization theory and applications*, Vol. 38, No. 2, pp. 251-274, 1982
- 3) A. P. Seyranian, E. Lund, N. Olhoff : Multiple eigenvalues in structural optimization problems, *Structural Optimization* 8, pp.207-227, 1994
- 4) J. Czyz, S. Lukasiewicz : Optimization of space lattice structures with multimodal frequency constraints, *Spatial, Lattice and Tension Structures*, Proceedings of the IASS-ASCE International Symposium, pp.419-428, 1994
- 5) 寒野善博, 大崎純, 藤澤克樹, 加藤直樹 : 半正定値計画法を用いた指定座屈荷重係数を有するトラストポロジー最適化, 日本建築学会構造系論文集, No.541, pp.113-119, 2001
- 6) 犬井鉄郎, 田辺行人, 小野田嘉孝 : 応用群論—群表現と物理学—, 裳華房, 1976
- 7) 小野田嘉孝 : 物性物理／物性化学のための群論入門, 裳華房, 1996

- 8) K. Ikeda, and K. Murota : Bifurcation hierarchy of symmetric structures, *Int. J. Solids Structures*, Vol. 27, No. 12, pp. 1551-1573, 1991
- 9) K. Ikeda, and K. Murota : Bifurcation analysis of symmetric structures using block-diagonalization, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 86(2), pp. 215-243, 1991
- 10) 茨木俊秀他 : FORTRAN77 最適化プログラミング, 岩波書店, 1991
- 11) E. J. Haug, K. K. Choi, V. Komkov : *Design Sensitivity Analysis of Structural Systems*, Academic Press, 1986
- 12) I. Kosaka, C. C. Swan : A symmetry reduction method for continuum structural topology optimization, *Computers and Structures*, 70, pp. 47-61, 1999
- 13) M. Ohsaki, K. Fujisawa, N. Katoh, Y. Kanno : Semi-definite programming for topology optimization of trusses under multiple eigenvalue constraints, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 180, pp. 203-217, 1999
- 14) 単層ラチスドームの安定解析—その現状と問題点—, 日本建築学会, 1989

謝辞

本論文は、鹿児島大学に就任して以来6年をかけて行った研究をまとめたものです（一部に名古屋大学大学院博士前期課程の2年間に行った研究を含んでいます）。この間、多くの方々から温かいご指導、ご支援を戴きました。

名古屋大学教授 大森博司先生、鹿児島大学教授 皆川洋一先生には、非常に多くのご指導とご支援を戴きました。大森博司先生には、名古屋大学大学院生時代に本論文の研究テーマを与えて頂き、この間、懇切丁寧なご指導を戴きました。また、その後東洋建設に勤務していた著者に鹿児島大学に助手として赴任するきっかけを与えて戴きました。その後も、放漫に研究を進める浅学な著者に対して、時折時間を割いて頂き、常に温かいご助言と励ましのお言葉を戴きました。ここに心から厚く御礼申し上げます。皆川洋一先生には、助手として赴任して以来、多くのご指導を戴きました。研究に関して重要なご意見や示唆を与えて下さると同時に、研究に取り組む姿勢や考え方など、初学者として大切なことを数多く教えていただきました。またこの研究に自ら囚われ、助手としての責務が果たせていないにもかかわらず、寛大な理解を示していただき、いつも温かいご指導を戴きました。ここに心から厚くお礼申し上げます。

また、名古屋大学教授 勅使河原正臣先生、同教授 福和伸夫先生、同助教授 古川忠稔先生には、論文審査の過程で、貴重なご意見、ご指摘を賜りました。心より厚くお礼申し上げます。

鹿児島大学助教授 本間俊雄先生には、日頃から研究に関するご相談に乗って戴き、いつも温かいご助言と励ましのお言葉を戴きました。心より厚くお礼申し上げます。

名古屋大学在学時の講座の教官であった名城大学教授松井徹哉先生並びに大同工業大学助教授萩原伸幸先生には、卒業後もいつも温かい励ましのお言葉を頂きました。ここに深く感謝いたします。また、名古屋大学在学時の研究室の諸先輩方に深く感謝いたします。学生時代にプログラミングの仕方や数値解析法を懇切丁寧に教えていただきました。卒業後もBig-Eggが参考になりました。

東洋建設に在職中に上司であった芳賀勇治氏、森修氏をはじめとする美浦研究所の皆様に深く感謝いたします。この2年半に無知な著者に非常に多くご指導を戴き、退職後も折りに触れ温かい激励のお言葉を戴きました。

京都大学助教授 大崎純先生には、研究に関する論文を紹介していただき、また数々の貴重なご意見を戴きました。ここに深く感謝いたします。東北大学教授 池田清宏先生にはⅡ部3章で扱った群論に関する有用な情報や論文を数多くご紹介戴き、研究に関して貴重なご意見を戴きました。ここに深く感謝いたします。

鹿児島大学助手 中原浩之先生には、研究に関する泣き言や練り言を毎日のように聞いていただきました。甚大なるご迷惑をここにお詫びするとともに、心より深く感謝いたします。鹿児島大学技官中村達哉氏には、日常の業務に対し数々のご支援を戴きました。ここに深く感謝いたします。また、赤木光志博士をはじめとする研究室の卒業生、学生諸氏からは、多くの力学に関する知識や理解を得ました。ここに深く感謝いたします。

2005年2月

発表論文

審査論文

- ・山本憲司, 皆川洋一, 大森博司: 剛性行列のブロック対角化を利用した線形座屈荷重を目的関数とする単層トラスドームの形状最適化, 日本建築学会構造系論文集, No. 578, pp. 51-58, 2004
- ・山本憲司, 皆川洋一, 大森博司: 座屈荷重を目的関数とする空間構造の形状最適化に関する研究, 日本建築学会構造系論文集, No. 564, pp. 95-102, 2003
- ・H. Ohmori, K. Yamamoto : Shape Optimization of Shell and Spatial Structures for Specified Stress Distribution Part2: Space Frame Analysis, Journal of the International Association for Shell and Spatial Structure, Vol.39, pp.147-158, DEC.1998
- ・H. Ohmori, K. Yamamoto : Shape Optimization of Shell and Spatial Structures for Specified Stress Distribution Part1: Shell Analysis, Journal of the International Association for Shell and Spatial Structure, Vol.39, pp.3-13, APR.1998
- ・大森博司, 山本憲司: 応力分布を目的関数とする空間構造の形状最適化に関する研究その2 スペースフレームへの適用, 日本建築学会構造系論文集, No. 503, pp. 77-83, 1998
- ・大森博司, 山本憲司: 応力分布を目的関数とする空間構造の形状最適化に関する研究その1 シェル構造への適用, 日本建築学会構造系論文集, No. 496, pp. 67-73, 1997
- ・藤谷義信, 藤井大地, 春日康博, 尾中敦義, 平田裕一, 荒井 宏, 塩崎洋一, 山本憲司: 鉄筋コンクリート建物の最適設計プログラムの開発, 日本建築学会技術報告集, No. 5, pp. 63, 1997

口頭発表(シンポジウム)

- ・山本憲司, 皆川洋一, 大森博司: 線形座屈荷重を目的関数とする単層トラスドームの形状最適化, 日本計算工学会講演会論文集, Vol.9, No.1, pp.403-406, 2004
- ・山本憲司, 皆川洋一, 大森博司: 剛性行列のブロック対角化を利用した対称トラス構造物の線形座屈荷重最大化, 日本計算工学会講演会論文集, Vol.8, No.1, pp.323-326, 2003
- ・山本憲司, 本間俊雄, 皆川洋一: 自律分散有限要素法を用いたケーブル構造の導入張力の最適化, 日本機械学会第15回計算力学講演会論文集, pp.587-588, 2002
- ・山本憲司, 本間俊雄, 皆川洋一: 自律分散有限要素法によるケーブル構造の初期張力決定法について, 日本機械学会第5回最適化シンポジウム'02(OPTIS2002), pp.159-164, 2002
- ・山本憲司: 曲面構造の形状最適化, 第2回半谷裕彦記念形態解析セミナー, 2000年7月
- ・山本憲司, 本間俊雄, 皆川洋一, 登坂宣好: 生物的アプローチによる空間構造物の最小重量設計解析(遺伝的アルゴリズムと自律分散系解法について), 日本計算工学会講演会論文集, Vol.4, No.1,

pp.497-500, 1999

- ・山本憲司, 塩崎洋一, 春日康博, 平田裕一, 藤井大地, 藤谷義信: 保有水平耐力の制約を考慮した鉄骨建物の最適設計, 第47回応用力学連合講演会論文集, 1998
- ・山本憲司, 大森博司: 軸策曲面の形状解析, 構造形態の解析と創生コロキウム講演論文集, pp173-176, 11.1995

口頭発表 (日本建築学会大会)

- ・山本憲司, 皆川洋一, 大森博司: 剛性行列のブロック対角化を利用した線形座屈荷重を目的関数とする剛接合単層ラチスドームの形状最適化, 日本建築学会大会梗概集、B-1, p.811-812, 2004
- ・山本憲司, 皆川洋一, 大森博司: ブロック対角化を利用した線形座屈荷重を目的関数とする対称トラス構造物の形状最適化, 日本建築学会大会梗概集、B-1, p.261-262, 2003
- ・山本憲司, 皆川洋一, 大森博司: 座屈荷重を目的関数とするスペースフレームの形状最適化に関する研究, 日本建築学会大会梗概集、B-1, p.317-318, 2002
- ・山本憲司, 皆川洋一, 大森博司: 座屈荷重を目的関数とする対称平面アーチの形状最適化, 日本建築学会大会梗概集、B-1, p.325-326, 2001
- ・山本憲司, 皆川洋一, 大森博司: 分岐座屈荷重を最大とする対称平面アーチの形状解析, 日本建築学会大会梗概集、B-1, p.323-324, 2000
- ・梶弁慶, 本間俊雄, 山本憲司, 皆川洋一, 登坂宣好: 生物的アプローチによるトラス構造の最適重量設計解析 遺伝的アルゴリズム (GA) と自律分散有限要素法 (ADFEM) による解の比較と特性, 日本建築学会大会梗概集、B-1, p.345-346, 2000
- ・山本憲司, 皆川洋一: 遺伝的アルゴリズムによる単層トラスドームの最小重量設計解析, 日本建築学会大会梗概集、B-1, pp.963-964, 1999
- ・菅野良一, 森修, 芳賀勇治, 山本憲司: 柱 RC 梁 S 混合構造の接合部に関する十字型加力実験, 日本建築学会大会梗概集、C-1, pp.1037-1038, 1999
- ・登坂宣好, 本間俊雄, 山本憲司, 皆川洋一: 遺伝的アルゴリズムと自律分散系解法による空間構造の最小重量解析, 日本建築学会大会梗概集、B-1, pp.381-382, 1999
- ・山本憲司, 森修, 芳賀勇治, 笹川和郎: 積層ゴム用引抜き対策装置の実験的研究 (静的加力実験), 日本建築学会大会梗概集、B-2, pp.525-526, 1998
- ・甲斐誠, 西永雅一, 森修, 山本憲司: ハイブリッド構造に関する日米共同構造実験研究 (CFT-28) CFT 柱・鉄骨梁接合部実験 —その4 円形鋼管接合部の挙動—, 日本建築学会大会梗概集、C-1, pp.1215-1216, 1998
- ・大森雅人, 前多高広, 山本憲司, 大森博司: 応力分布を目的関数とする曲面構造の形状最適化に関する研究 その4. 複数種の荷重下における形状解析, 日本建築学会大会梗概集、B-1, pp.1019-1020,

1997

- ・山本憲司, 森修, 町田興弘, 青木雅: 軟弱地盤における免震効果についての一考察, 日本建築学会大会梗概集, B-2, pp.629-630, 1997
- ・大森雅人, 前多高広, 山本憲司, 大森博司: 応力分布を目的関数とする曲面構造の形状最適化に関する研究 その5. 三角形平板要素を用いた解析, 日本建築学会大会梗概集, B-1, pp.1021-1022, 1997
- ・山本憲司, 前多高広, 鬼頭伸彰, 大森博司: 応力分布を目的関数とする曲面構造の形状最適化に関する研究 その1. 理論と定式化, 日本建築学会大会梗概集, B-1, pp.991-992, 1996
- ・鬼頭伸彰, 山本憲司, 前多高広, 大森博司: 応力分布を目的関数とする曲面構造の形状最適化に関する研究 その2. 形状解析例, 日本建築学会大会梗概集, B-1, pp.993-994, 1996
- ・前多高広, 山本憲司, 鬼頭伸彰, 大森博司: 応力分布を目的関数とする曲面構造の形状最適化に関する研究 その3. 感度解析による検証, 日本建築学会大会梗概集, B-1, pp.995-996, 1996
- ・前田高広, 大森博司, 中増裕介, 山本憲司: 軸索構造物としての平面アーチの形状解析, 日本建築学会大会梗概集, B-1, pp.555-556, 1995
- ・中増裕介, 大森博司, 山本憲司: 軸索曲面の形状解析 (その1 形状解析), 日本建築学会大会梗概集, B-1, pp.557-558, 1995
- ・山本憲司, 大森博司, 中増裕介: 軸索曲面の形状解析 (その2 応力解析), 日本建築学会大会梗概集, B-1, pp.559-560, 1995

口頭発表(日本建築学会九州支部研究報告)

- ・山本憲司, 皆川洋一, 大森博司: 座屈荷重を目的関数とする空間構造の形状最適化に関する研究, 日本建築学会九州支部研究報告, 第41号・1, pp.333-336, 2002
- ・山本憲司, 皆川洋一, 大森博司: 座屈荷重を目的関数とする対称平面アーチの形状最適化, 日本建築学会九州支部研究報告, 第40号・1, p.333-336, 2001
- ・山本憲司, 皆川洋一, 大森博司: 曲げ応力分布を最小化とする任意形状シェル形状解析, 日本建築学会九州支部研究報告, 第39号・1, p.333-336, 2000

付録 A

軸対称シェル要素による定式化

マトリクス詳細

軸対称シェル要素による各種マトリクス及び節点z座標による微分マトリクスを示す。

要素内の回転半径

$$r(\xi) = (1 - \xi)r_i + \xi r_j \quad (\text{A-1})$$

$$\frac{\partial r}{\partial z_i} = \frac{\partial r}{\partial z_j} = 0 \quad (\text{A-2})$$

要素長

$$l = \sqrt{(r_j - r_i)^2 + (z_j - z_i)^2} \quad (\text{A-3})$$

$$\frac{\partial l}{\partial z_i} = -\frac{z_j - z_i}{l} = -\cos \phi, \quad \frac{\partial l}{\partial z_j} = -\frac{\partial l}{\partial z_i} \quad (\text{A-4})$$

座標変換マトリクス

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\lambda} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A-5})$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial z_i} = \begin{bmatrix} -\frac{\sin^2 \phi}{l} & 0 & \frac{\sin \phi \cos \phi}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\sin \phi \cos \phi}{l} & 0 & -\frac{\sin^2 \phi}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial z_j} = -\frac{\partial \boldsymbol{\lambda}}{\partial z_i} \quad (\text{A-6})$$

歪-変位マトリクス

$$\mathbf{B}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_m & \mathbf{B}_m \end{bmatrix} \quad (\text{A-7})$$

$$\mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} -1/l & 0 & 0 & 0 \\ A_1 \sin \phi / r & nA_1 / r & A_8 \cos \phi / r & lA_9 \cos \phi / r \\ -nA_1 / r & -1/l - A_1 \sin \phi / r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6A_2 / l^2 & (4 - 6\xi) / l \\ 0 & nA_1 \cos \phi / r^2 & n^2 A_8 / r^2 + 6A_3 / lr & n^2 lA_9 / r^2 - A_5 \sin \phi / r \\ 0 & -2 \cos \phi / lr - 2A_1 \sin \phi \cos \phi / r^2 & -12nA_3 / lr - 2nA_8 \sin \phi / r^2 & 2nA_5 / r - 2nlA_9 \sin \phi / r^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A-8})$$

$$\mathbf{B}_m = \begin{bmatrix} 1/l & 0 & 0 & 0 \\ \xi \sin \phi / r & n\xi / r & A_7 \cos \phi / r & -lA_6 \cos \phi / r \\ -n\xi / r & 1/l - \xi \sin \phi / r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6A_2 / l^2 & (2 - 6\xi) / l \\ 0 & n\xi \cos \phi / r^2 & n^2 A_7 / r^2 - 6A_3 / lr & -n^2 lA_6 / r^2 + A_1 \sin \phi / r \\ 0 & 2 \cos \phi / lr - 2\xi \sin \phi \cos \phi / r^2 & 12nA_3 / lr - 2nA_7 \sin \phi / r^2 & -2nA_1 / r + 2nlA_6 \sin \phi / r^2 \end{bmatrix} \quad (\text{A-9})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial z_i}(1,1) &= -\frac{\cos \phi}{l^2} & \frac{\partial \mathbf{B}_{jm}}{\partial z_i}(1,1) &= \frac{\cos \phi}{l^2} \\
\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial z_i}(2,1) &= \frac{A_1 \sin \phi \cos \phi}{lr} & \frac{\partial \mathbf{B}_{jm}}{\partial z_i}(2,1) &= \frac{\xi \sin \phi \cos \phi}{lr} \\
\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial z_i}(3,1) &= 0 & \frac{\partial \mathbf{B}_{jm}}{\partial z_i}(3,1) &= 0 \\
\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial z_i}(2,2) &= 0 & \frac{\partial \mathbf{B}_{jm}}{\partial z_i}(2,2) &= 0 \\
\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial z_i}(3,2) &= -\frac{\cos \phi}{l^2} - \frac{A_1 \sin \phi \cos \phi}{lr} & \frac{\partial \mathbf{B}_{jm}}{\partial z_i}(3,2) &= \frac{\cos \phi}{l^2} - \frac{\xi \sin \phi \cos \phi}{lr} \\
\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial z_i}(5,2) &= -nA_1 \frac{\sin^2 \phi}{lr^2} & \frac{\partial \mathbf{B}_{jm}}{\partial z_i}(5,2) &= -n\xi \frac{\sin^2 \phi}{lr^2} \\
\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial z_i}(6,2) &= \frac{2 \sin^2 \phi}{l^2 r} - \frac{2 \cos^2 \phi}{l^2 r} - 2A_1 \left(\frac{\sin \phi \cos^2 \phi}{lr^2} - \frac{\sin^3 \phi}{lr^2} \right) & \frac{\partial \mathbf{B}_{jm}}{\partial z_i}(6,2) &= -\frac{2 \sin^2 \phi}{l^2 r} + \frac{2 \cos^2 \phi}{l^2 r} - 2\xi \left(\frac{\sin \phi \cos^2 \phi}{lr^2} - \frac{\sin^3 \phi}{lr^2} \right) \\
\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial z_i}(2,3) &= -\frac{A_8 \sin^2 \phi}{lr} & \frac{\partial \mathbf{B}_{jm}}{\partial z_i}(2,3) &= -\frac{A_7 \sin^2 \phi}{lr} \\
\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial z_i}(4,3) &= \frac{12A_2 \cos \phi}{l^3} & \frac{\partial \mathbf{B}_{jm}}{\partial z_i}(4,3) &= -\frac{12A_2 \cos \phi}{l^3} \\
\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial z_i}(5,3) &= \frac{12A_3 \sin \phi \cos \phi}{l^2 r} & \frac{\partial \mathbf{B}_{jm}}{\partial z_i}(5,3) &= -\frac{12A_3 \sin \phi \cos \phi}{l^2 r} \\
\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial z_i}(6,3) &= -\frac{12nA_3 \cos \phi}{l^2 r} - \frac{2nA_8 \sin \phi \cos \phi}{lr^2} & \frac{\partial \mathbf{B}_{jm}}{\partial z_i}(6,3) &= \frac{12nA_3 \cos \phi}{l^2 r} - \frac{2nA_7 \sin \phi \cos \phi}{lr^2} \\
\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial z_i}(2,4) &= -\frac{A_9}{r} & \frac{\partial \mathbf{B}_{jm}}{\partial z_i}(2,4) &= \frac{A_6}{r} \\
\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial z_i}(4,4) &= \frac{(4-6\xi) \cos \phi}{l^2} & \frac{\partial \mathbf{B}_{jm}}{\partial z_i}(4,4) &= \frac{(2-6\xi) \cos \phi}{l^2} \\
\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial z_i}(5,4) &= -\frac{n^2 A_9 \cos \phi}{r^2} - \frac{A_5 \sin \phi \cos \phi}{lr} & \frac{\partial \mathbf{B}_{jm}}{\partial z_i}(5,4) &= \frac{n^2 A_6 \cos \phi}{r^2} + \frac{A_4 \sin \phi \cos \phi}{lr} \\
\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial z_i}(6,4) &= 0 & \frac{\partial \mathbf{B}_{jm}}{\partial z_i}(6,4) &= 0
\end{aligned} \tag{A-10}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial z_j} = -\frac{\partial \mathbf{B}_m}{\partial z_i}, \quad \frac{\partial \mathbf{B}_{jm}}{\partial z_j} = -\frac{\partial \mathbf{B}_{jm}}{\partial z_i} \tag{A-12}$$

剛性マトリクス

$$\bar{\mathbf{k}}_n = \mathbf{T}^T \left(\pi l \int_0^1 \mathbf{B}_n^T \mathbf{D} \mathbf{B}_n r d\xi \right) \mathbf{T} \tag{A-13}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \bar{\mathbf{k}}_n}{\partial z_i} &= \frac{\partial \mathbf{T}^T}{\partial z_i} \left(\pi l \int_0^1 \mathbf{B}_n^T \mathbf{D} \mathbf{B}_n r d\xi \right) \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \left[\pi \frac{\partial l}{\partial z_i} \int_0^1 \mathbf{B}_n^T \mathbf{D} \mathbf{B}_n r d\xi + \pi l \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathbf{B}_n^T}{\partial z_i} \mathbf{D} \mathbf{B}_n r + \mathbf{B}_n^T \mathbf{D} \frac{\partial \mathbf{B}_n}{\partial z_i} r + \mathbf{B}_n^T \mathbf{D} \mathbf{B}_n \frac{\partial r}{\partial z_i} \right) d\xi \right] \mathbf{T} \\
&\quad + \mathbf{T}^T \left(\pi l \int_0^1 \mathbf{B}_n^T \mathbf{D} \mathbf{B}_n r d\xi \right) \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z_i}
\end{aligned} \tag{A-14}$$

\mathbf{G}_n マトリクス

$$\mathbf{G}_n = \pi l \int_0^1 \mathbf{B}_n^{*T} \mathbf{D}^{*T} \mathbf{D}^* \mathbf{B}_n^* r d\xi \tag{A-15}$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_n}{\partial z_i} = \pi \frac{\partial l}{\partial z_i} \int_0^1 \mathbf{B}_n^{*T} \mathbf{D}^{*T} \mathbf{D}^* \mathbf{B}_n^* r d\xi + \pi l \int_0^1 \left(\frac{\partial \mathbf{B}_n^{*T}}{\partial z_i} \mathbf{D}^{*T} \mathbf{D}^* \mathbf{B}_n^* r + \mathbf{B}_n^{*T} \mathbf{D}^{*T} \mathbf{D}^* \frac{\partial \mathbf{B}_n^*}{\partial z_i} r + \mathbf{B}_n^{*T} \mathbf{D}^{*T} \mathbf{D}^* \mathbf{B}_n^* \frac{\partial r}{\partial z_i} \right) d\xi \tag{A-16}$$

要素面積

$$S_e = \pi(r_j + r_i)l \quad (\text{A-17})$$

$$\frac{\partial S_e}{\partial z_i} = \pi(r_j + r_i) \frac{\partial l}{\partial z_i} \quad (\text{A-18})$$

等価節点力（自重）

単位面積あたりの重さを q とすると、要素任意位置における分布外力は次式により与えられる。

$$\mathbf{q}(\xi, \theta) = [q \cos \phi \quad 0 \quad -q \sin \phi \quad 0]^T \quad (\text{A-19})$$

外力仕事 W は $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}$ より、次式により与えられる。

$$W = \int_0^{2\pi} l \int_0^1 \mathbf{q}^T \mathbf{N} \mathbf{d} r d\xi d\theta = 2\pi l \int_0^1 \mathbf{q}^T \mathbf{N} r d\xi \mathbf{d}_0 \quad (\text{A-20})$$

また、Fourier 級数の展開次数 $n = 0$ の節点外力 \mathbf{f}_{r_0} が作用する時の外力仕事は次式となる。

$$W = 2\pi \mathbf{f}_{r_0}^T \mathbf{d}_0 \quad (\text{A-21})$$

(A-20)式と(A-21)式が等しいものとすれば、等価節点力ベクトル \mathbf{f}_{r_0} は次式により与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{r_0}^T &= l \int_0^1 \mathbf{q}^T \mathbf{N} r d\xi \\ &= \left[\left(\frac{1}{3} r_i + \frac{1}{6} r_j \right) gl \cos \phi \quad 0 \quad - \left(\frac{7}{20} r_i + \frac{3}{20} r_j \right) gl \sin \phi \quad - \left(\frac{1}{20} r_i + \frac{1}{30} r_j \right) gl^2 \sin \phi \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{6} r_i + \frac{1}{3} r_j \right) gl \cos \phi \quad 0 \quad - \left(\frac{3}{20} r_i + \frac{7}{20} r_j \right) gl \sin \phi \quad + \left(\frac{1}{30} r_i + \frac{1}{20} r_j \right) gl^2 \sin \phi \right] \end{aligned} \quad (\text{A-22})$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{r_0}^T}{\partial z_i} = \left[- \left(\frac{1}{3} r_i + \frac{1}{6} r_j \right) g \quad 0 \quad 0 \quad + \left(\frac{1}{20} r_i + \frac{1}{30} r_j \right) (r_j - r_i) g \cos \phi \quad - \left(\frac{1}{6} r_i + \frac{1}{3} r_j \right) g \quad 0 \quad 0 \quad - \left(\frac{1}{30} r_i + \frac{1}{20} r_j \right) (r_j - r_i) g \cos \phi \right]$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{r_0}^T}{\partial z_j} = - \frac{\partial \mathbf{f}_{r_0}^T}{\partial z_i} \quad (\text{A-23})$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{L}(1,1)}{\partial \bar{z}_1} &= (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \left\{ (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}, & \frac{\partial \mathbf{L}(1,1)}{\partial \bar{z}_2} &= -\frac{\partial \mathbf{L}(1,1)}{\partial \bar{z}_1}, & \frac{\partial \mathbf{L}(1,1)}{\partial \bar{z}_3} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{L}(1,2)}{\partial \bar{z}_1} &= (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)(\bar{z}_2 - \bar{z}_1) \left\{ (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}, & \frac{\partial \mathbf{L}(1,2)}{\partial \bar{z}_2} &= -\frac{\partial \mathbf{L}(1,2)}{\partial \bar{z}_1}, & \frac{\partial \mathbf{L}(1,2)}{\partial \bar{z}_3} &= 0 \\ \frac{\partial \mathbf{L}(1,3)}{\partial \bar{z}_1} &= -\left\{ (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 \right\} \left\{ (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)^2 + (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^2 \right\}^{\frac{3}{2}}, & \frac{\partial \mathbf{L}(1,3)}{\partial \bar{z}_2} &= -\frac{\partial \mathbf{L}(1,3)}{\partial \bar{z}_1}, & \frac{\partial \mathbf{L}(1,3)}{\partial \bar{z}_3} &= 0\end{aligned}$$

$X = (\bar{y}_{21}\bar{z}_{31} - \bar{y}_{31}\bar{z}_{21})^2 + (\bar{z}_{21}\bar{x}_{31} - \bar{z}_{31}\bar{x}_{21})^2 + (\bar{x}_{21}\bar{y}_{31} - \bar{x}_{31}\bar{y}_{21})^2$ とおく。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{L}(3,1)}{\partial \bar{z}_i} &= -\bar{y}_{jk} X^{-\frac{1}{2}} - (\bar{y}_{21}\bar{z}_{31} - \bar{y}_{31}\bar{z}_{21}) X^{-\frac{3}{2}} \left\{ (\bar{y}_{21}\bar{z}_{31} - \bar{y}_{31}\bar{z}_{21})(-\bar{y}_{jk}) + (\bar{z}_{21}\bar{x}_{31} - \bar{z}_{31}\bar{x}_{21})(\bar{x}_{jk}) \right\} \\ \frac{\partial \mathbf{L}(3,2)}{\partial \bar{z}_i} &= \bar{x}_{jk} X^{-\frac{1}{2}} - (\bar{z}_{21}\bar{x}_{31} - \bar{z}_{31}\bar{x}_{21}) X^{-\frac{3}{2}} \left\{ (\bar{y}_{21}\bar{z}_{31} - \bar{y}_{31}\bar{z}_{21})(-\bar{y}_{jk}) + (\bar{z}_{21}\bar{x}_{31} - \bar{z}_{31}\bar{x}_{21})(\bar{x}_{jk}) \right\} \\ \frac{\partial \mathbf{L}(3,3)}{\partial \bar{z}_i} &= -(\bar{x}_{21}\bar{y}_{31} - \bar{x}_{31}\bar{y}_{21}) X^{-\frac{3}{2}} \left\{ (\bar{y}_{21}\bar{z}_{31} - \bar{y}_{31}\bar{z}_{21})(-\bar{y}_{jk}) + (\bar{z}_{21}\bar{x}_{31} - \bar{z}_{31}\bar{x}_{21})(\bar{x}_{jk}) \right\}\end{aligned}$$

ここに、 (i, j, k) は $(1, 2, 3)$ の巡回置換を表す。

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{L}(2,1)}{\partial \bar{z}_i} &= \frac{\partial \mathbf{L}(3,2)}{\partial \bar{z}_i} \mathbf{L}(1,3) + \mathbf{L}(3,2) \frac{\partial \mathbf{L}(1,3)}{\partial \bar{z}_i} - \frac{\partial \mathbf{L}(1,2)}{\partial \bar{z}_i} \mathbf{L}(3,3) - \mathbf{L}(1,2) \frac{\partial \mathbf{L}(3,3)}{\partial \bar{z}_i} \\ \frac{\partial \mathbf{L}(2,2)}{\partial \bar{z}_i} &= \frac{\partial \mathbf{L}(3,3)}{\partial \bar{z}_i} \mathbf{L}(1,1) + \mathbf{L}(3,3) \frac{\partial \mathbf{L}(1,1)}{\partial \bar{z}_i} - \frac{\partial \mathbf{L}(1,3)}{\partial \bar{z}_i} \mathbf{L}(3,1) - \mathbf{L}(1,3) \frac{\partial \mathbf{L}(3,1)}{\partial \bar{z}_i} \\ \frac{\partial \mathbf{L}(2,3)}{\partial \bar{z}_i} &= \frac{\partial \mathbf{L}(3,1)}{\partial \bar{z}_i} \mathbf{L}(1,2) + \mathbf{L}(3,1) \frac{\partial \mathbf{L}(1,2)}{\partial \bar{z}_i} - \frac{\partial \mathbf{L}(1,1)}{\partial \bar{z}_i} \mathbf{L}(3,2) - \mathbf{L}(1,1) \frac{\partial \mathbf{L}(3,2)}{\partial \bar{z}_i}\end{aligned}$$

(B-4)

要素座標における節点座標値

要素座標における節点座標値は、次式により表される。

$$x_i = \mathbf{1}_x^T (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_1), \quad y_i = \mathbf{1}_y^T (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_1), \quad z_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (\text{B-5})$$

要素座標における節点座標値の感度係数は次式により与えられる。

$$\frac{\partial x_i}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial \mathbf{1}_x^T}{\partial \bar{z}_j} (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_1) + \mathbf{1}_x^T \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_i}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_1}{\partial \bar{z}_j} \right), \quad \frac{\partial y_i}{\partial \bar{z}_j} = \frac{\partial \mathbf{1}_y^T}{\partial \bar{z}_j} (\bar{\mathbf{r}}_i - \bar{\mathbf{r}}_1) + \mathbf{1}_y^T \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_i}{\partial \bar{z}_j} - \frac{\partial \bar{\mathbf{r}}_1}{\partial \bar{z}_j} \right), \quad \frac{\partial z_i}{\partial \bar{z}_j} = 0 \quad (\text{B-6})$$

要素表面積

$$S_e = \frac{1}{2} \sqrt{(\bar{y}_{21}\bar{z}_{31} - \bar{y}_{31}\bar{z}_{21})^2 + (\bar{z}_{21}\bar{x}_{31} - \bar{z}_{31}\bar{x}_{21})^2 + (\bar{x}_{21}\bar{y}_{31} - \bar{x}_{31}\bar{y}_{21})^2} \quad (\text{B-7})$$

$$\frac{\partial S_e}{\partial \bar{z}_i} = -\frac{1}{2} \left\{ (\bar{y}_{21}\bar{z}_{31} - \bar{y}_{31}\bar{z}_{21})^2 + (\bar{z}_{21}\bar{x}_{31} - \bar{z}_{31}\bar{x}_{21})^2 + (\bar{x}_{21}\bar{y}_{31} - \bar{x}_{31}\bar{y}_{21})^2 \right\}^{-\frac{3}{2}} \left\{ (\bar{y}_{21}\bar{z}_{31} - \bar{y}_{31}\bar{z}_{21})(-\bar{y}_{jk}) + (\bar{z}_{21}\bar{x}_{31} - \bar{z}_{31}\bar{x}_{21})(\bar{x}_{jk}) \right\} \quad (\text{B-8})$$

歪-変位マトリクス (面内変形要素)

$$\mathbf{B}_p = \begin{bmatrix} L_{x1} & 0 & L_{x2} & 0 & L_{x3} & 0 \\ 0 & L_{y1} & 0 & L_{y2} & 0 & L_{y3} \\ L_{y1} & L_{x1} & L_{y2} & L_{x2} & L_{y3} & L_{x3} \end{bmatrix} \quad (\text{B-9})$$

ただし、 $L_{xi} = \frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{b_i}{2\Delta}$, $L_{yi} = \frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{c_i}{2\Delta}$

上式中の各成分に対する節点 z 座標に関する感度係数は、次式のように表せる。

$$\frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_i} = \frac{1}{2\Delta^2} \left\{ \left(\frac{\partial y_j}{\partial \bar{z}_i} - \frac{\partial y_k}{\partial \bar{z}_i} \right) \Delta - (y_j - y_k) \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{z}_i} \right\}, \quad \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_i} = \frac{1}{2\Delta^2} \left\{ \left(\frac{\partial x_j}{\partial \bar{z}_i} - \frac{\partial x_k}{\partial \bar{z}_i} \right) \Delta - (x_j - x_k) \frac{\partial \Delta}{\partial \bar{z}_i} \right\} \quad (\text{B-10})$$

ここに、 $\Delta = s_e$ であるので $\frac{\partial \Delta}{\partial \bar{z}_i}$ は既に得られている。

歪-変位マトリクス (面外変形要素)

$$\mathbf{B}_b = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} [N_1^{(0)}, N_2^{(0)}, N_3^{(0)}, N_1^{(1)}, N_2^{(1)}, N_3^{(1)}, N_1^{(2)}, N_2^{(2)}, N_3^{(2)}] \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} [N_1^{(0)}, N_2^{(0)}, N_3^{(0)}, N_1^{(1)}, N_2^{(1)}, N_3^{(1)}, N_1^{(2)}, N_2^{(2)}, N_3^{(2)}] \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [N_1^{(0)}, N_2^{(0)}, N_3^{(0)}, N_1^{(1)}, N_2^{(1)}, N_3^{(1)}, N_1^{(2)}, N_2^{(2)}, N_3^{(2)}] \end{bmatrix} \quad (\text{B-11})$$

上式の各成分とその感度係数を具体的に書き表せば、次式となる。

$$\frac{\partial^2 N_i^{(0)}}{\partial x^2} = 2L_{xi}L_{xj}(L_i - L_j) + 2L_iL_{xj}(L_{xi} - L_{xj}) + 2L_{xi}L_j(L_{xi} - L_{xj}) + 2L_{xi}L_{xk}(L_i - L_k) + 2L_iL_{xk}(L_{xi} - L_{xk}) + 2L_{xi}L_k(L_{xi} - L_{xk}) \quad (\text{B-12-1})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 N_i^{(0)}}{\partial x^2 \partial \bar{z}_i} &= 2\frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_i}L_{xj}(L_i - L_j) + 2L_{xi}\frac{\partial L_{xj}}{\partial \bar{z}_i}(L_i - L_j) + 2L_i\frac{\partial L_{xj}}{\partial \bar{z}_i}(L_{xi} - L_{xj}) + 2L_{xi}L_{xj}\left(\frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_i} - \frac{\partial L_{xj}}{\partial \bar{z}_i}\right) \\ &+ 2\frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_i}L_j(L_{xi} - L_{xj}) + 2L_{xi}L_j\left(\frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_i} - \frac{\partial L_{xj}}{\partial \bar{z}_i}\right) + 2\frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_i}L_{xk}(L_i - L_k) + 2L_{xi}\frac{\partial L_{xk}}{\partial \bar{z}_i}(L_i - L_k) \\ &+ 2L_i\frac{\partial L_{xk}}{\partial \bar{z}_i}(L_{xi} - L_{xk}) + 2L_iL_{xk}\left(\frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_i} - \frac{\partial L_{xk}}{\partial \bar{z}_i}\right) + 2\frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_i}L_k(L_{xi} - L_{xk}) + 2L_{xi}L_k\left(\frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_i} - \frac{\partial L_{xk}}{\partial \bar{z}_i}\right) \end{aligned} \quad (\text{B-13-1})$$

$$\frac{\partial^2 N_i^{(0)}}{\partial y^2} = 2L_{yi}L_{yj}(L_i - L_j) + 2L_iL_{yj}(L_{yi} - L_{yj}) + 2L_{yi}L_j(L_{yi} - L_{yj}) + 2L_{yi}L_{yk}(L_i - L_k) + 2L_iL_{yk}(L_{yi} - L_{yk}) + 2L_{yi}L_k(L_{yi} - L_{yk}) \quad (\text{B-12-2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 N_i^{(0)}}{\partial y^2 \partial \bar{z}_i} &= 2\frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_i}L_{yj}(L_i - L_j) + 2L_{yi}\frac{\partial L_{yj}}{\partial \bar{z}_i}(L_i - L_j) + 2L_i\frac{\partial L_{yj}}{\partial \bar{z}_i}(L_{yi} - L_{yj}) + 2L_iL_{yj}\left(\frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_i} - \frac{\partial L_{yj}}{\partial \bar{z}_i}\right) \\ &+ 2\frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_i}L_j(L_{yi} - L_{yj}) + 2L_{yi}L_j\left(\frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_i} - \frac{\partial L_{yj}}{\partial \bar{z}_i}\right) + 2\frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_i}L_{yk}(L_i - L_k) + 2L_{yi}\frac{\partial L_{yk}}{\partial \bar{z}_i}(L_i - L_k) \\ &+ 2L_i\frac{\partial L_{yk}}{\partial \bar{z}_i}(L_{yi} - L_{yk}) + 2L_iL_{yk}\left(\frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_i} - \frac{\partial L_{yk}}{\partial \bar{z}_i}\right) + 2\frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_i}L_k(L_{yi} - L_{yk}) + 2L_{yi}L_k\left(\frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_i} - \frac{\partial L_{yk}}{\partial \bar{z}_i}\right) \end{aligned} \quad (\text{B-13-2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 N_i^{(0)}}{\partial x \partial y} &= (L_{xi}L_{yj} + L_{yi}L_{xj})(L_i - L_j) + (L_{yi}L_j + L_iL_{yj})(L_{xi} - L_{xj}) + (L_{xi}L_j + L_iL_{xj})(L_{yi} - L_{yj}) \\ &+ (L_{xi}L_{yk} + L_{yi}L_{xk})(L_i - L_k) + (L_{yi}L_k + L_iL_{yk})(L_{xi} - L_{xk}) + (L_{xi}L_k + L_iL_{xk})(L_{yi} - L_{yk}) \end{aligned} \quad (\text{B-12-3})$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 N_i^{(0)}}{\partial x \partial y \partial \bar{z}_l} &= \left(\frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_l} L_{yj} + L_{xi} \frac{\partial L_{yj}}{\partial \bar{z}_l} + \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_l} L_{xj} + L_{yi} \frac{\partial L_{xj}}{\partial \bar{z}_l} \right) (L_i - L_j) \\
&+ \left(\frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_l} L_j + L_i \frac{\partial L_{yj}}{\partial \bar{z}_l} \right) (L_{xi} - L_{xj}) + (L_{yi} L_j + L_i L_{yj}) \left(\frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_l} - \frac{\partial L_{xj}}{\partial \bar{z}_l} \right) \\
&+ \left(\frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_l} L_j + L_i \frac{\partial L_{xj}}{\partial \bar{z}_l} \right) (L_{yi} - L_{yj}) + (L_{xi} L_j + L_i L_{xj}) \left(\frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_l} - \frac{\partial L_{yj}}{\partial \bar{z}_l} \right) \\
&+ \left(\frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_l} L_{yk} + L_{xi} \frac{\partial L_{yk}}{\partial \bar{z}_l} + \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_l} L_{xk} + L_{yi} \frac{\partial L_{xk}}{\partial \bar{z}_l} \right) (L_i - L_k) \\
&+ \left(\frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_l} L_k + L_i \frac{\partial L_{yk}}{\partial \bar{z}_l} \right) (L_{xi} - L_{xk}) + (L_{yi} L_k + L_i L_{yk}) \left(\frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_l} - \frac{\partial L_{xk}}{\partial \bar{z}_l} \right) \\
&+ \left(\frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_l} L_k + L_i \frac{\partial L_{xk}}{\partial \bar{z}_l} \right) (L_{yi} - L_{yk}) + (L_{xi} L_k + L_i L_{xk}) \left(\frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_l} - \frac{\partial L_{yk}}{\partial \bar{z}_l} \right)
\end{aligned} \tag{B-13-3}$$

$$\frac{\partial^2 N_i^{(1)}}{\partial x^2} = b_k \left(2L_{xi}^2 L_j + 4L_i L_{xi} L_{xj} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{xx} \right) - b_j \left(2L_{xi}^2 L_k + 4L_i L_{xi} L_{xk} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{xx} \right) \tag{B-12-4}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 N_i^{(1)}}{\partial x^2 \partial \bar{z}_l} &= \frac{\partial b_k}{\partial \bar{z}_l} \left(2L_{xi}^2 L_j + 4L_i L_{xi} L_{xj} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{xx} \right) + b_k \left(4L_{xi} \frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_l} L_j + 4L_i \frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_l} L_{xj} + 4L_i L_{xi} \frac{\partial L_{xj}}{\partial \bar{z}_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial (L_1 L_2 L_3)_{xx}}{\partial \bar{z}_l} \right) \\
&- \frac{\partial b_j}{\partial \bar{z}_l} \left(2L_{xi}^2 L_k + 4L_i L_{xi} L_{xk} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{xx} \right) - b_j \left(4L_{xi} \frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_l} L_k + 4L_i \frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_l} L_{xk} + 4L_i L_{xi} \frac{\partial L_{xk}}{\partial \bar{z}_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial (L_1 L_2 L_3)_{xx}}{\partial \bar{z}_l} \right)
\end{aligned} \tag{B-13-4}$$

$$\frac{\partial^2 N_i^{(1)}}{\partial y^2} = b_k \left(2L_{yi}^2 L_j + 4L_i L_{yi} L_{yj} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{yy} \right) - b_j \left(2L_{yi}^2 L_k + 4L_i L_{yi} L_{yk} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{yy} \right) \tag{B-12-5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 N_i^{(1)}}{\partial y^2 \partial \bar{z}_l} &= \frac{\partial b_k}{\partial \bar{z}_l} \left(2L_{yi}^2 L_j + 4L_i L_{yi} L_{yj} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{yy} \right) + b_k \left(4L_{yi} \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_l} L_j + 4L_i \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_l} L_{yj} + 4L_i L_{yi} \frac{\partial L_{yj}}{\partial \bar{z}_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial (L_1 L_2 L_3)_{yy}}{\partial \bar{z}_l} \right) \\
&- \frac{\partial b_j}{\partial \bar{z}_l} \left(2L_{yi}^2 L_k + 4L_i L_{yi} L_{yk} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{yy} \right) - b_j \left(4L_{yi} \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_l} L_k + 4L_i \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_l} L_{yk} + 4L_i L_{yi} \frac{\partial L_{yk}}{\partial \bar{z}_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial (L_1 L_2 L_3)_{yy}}{\partial \bar{z}_l} \right)
\end{aligned} \tag{B-13-5}$$

$$\frac{\partial^2 N_i^{(1)}}{\partial x \partial y} = b_k \left(2L_{yi} L_{xi} L_j + 2L_i L_{xi} L_{yj} + 2L_i L_{yi} L_{xj} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{xy} \right) - b_j \left(2L_{yi} L_{xi} L_k + 2L_i L_{xi} L_{yk} + 2L_i L_{yi} L_{xk} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{xy} \right) \tag{B-12-6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^3 N_i^{(1)}}{\partial x \partial y \partial \bar{z}_l} &= \frac{\partial b_k}{\partial \bar{z}_l} \left(2L_{yi} L_{xi} L_j + 2L_i L_{xi} L_{yj} + 2L_i L_{yi} L_{xj} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{xy} \right) \\
&+ b_k \left(2 \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_l} L_{xi} L_j + 2L_{yi} \frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_l} L_j + 2L_i \frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_l} L_{yj} + 2L_i L_{xi} \frac{\partial L_{yj}}{\partial \bar{z}_l} + 2L_i \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_l} L_{xj} + 2L_i L_{yi} \frac{\partial L_{xj}}{\partial \bar{z}_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial (L_1 L_2 L_3)_{xy}}{\partial \bar{z}_l} \right) \\
&- \frac{\partial b_j}{\partial \bar{z}_l} \left(2L_{yi} L_{xi} L_k + 2L_i L_{xi} L_{yk} + 2L_i L_{yi} L_{xk} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{xy} \right) \\
&- b_j \left(2 \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_l} L_{xi} L_k + 2L_{yi} \frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_l} L_k + 2L_i \frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_l} L_{yk} + 2L_i L_{xi} \frac{\partial L_{yk}}{\partial \bar{z}_l} + 2L_i \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_l} L_{xk} + 2L_i L_{yi} \frac{\partial L_{xk}}{\partial \bar{z}_l} + \frac{1}{2} \frac{\partial (L_1 L_2 L_3)_{xy}}{\partial \bar{z}_l} \right)
\end{aligned} \tag{B-13-6}$$

$$\frac{\partial^2 N_i^{(2)}}{\partial x^2} = c_k \left(2L_{xi}^2 L_j + 4L_i L_{xi} L_{xj} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{xx} \right) - c_j \left(2L_{xi}^2 L_k + 4L_i L_{xi} L_{xk} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{xx} \right) \tag{B-12-7}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 N_i^{(2)}}{\partial x^2 \partial \bar{z}_i} &= \frac{\partial c_k}{\partial \bar{z}_i} \left(2L_{xi}^2 L_j + 4L_i L_{xi} L_{xj} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{xx} \right) + c_k \left(4L_{xi} \frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_i} L_j + 4L_i \frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_i} L_{xj} + 4L_i L_{xi} \frac{\partial L_{xj}}{\partial \bar{z}_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial (L_1 L_2 L_3)_{xx}}{\partial \bar{z}_i} \right) \\ &\quad - \frac{\partial c_j}{\partial \bar{z}_i} \left(2L_{xi}^2 L_k + 4L_i L_{xi} L_{xk} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{xx} \right) - c_j \left(4L_{xi} \frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_i} L_k + 4L_i \frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_i} L_{xk} + 4L_i L_{xi} \frac{\partial L_{xk}}{\partial \bar{z}_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial (L_1 L_2 L_3)_{xx}}{\partial \bar{z}_i} \right) \end{aligned} \quad (\text{B-13-7})$$

$$\frac{\partial^2 N_i^{(2)}}{\partial y^2} = c_k \left(2L_{yi}^2 L_j + 4L_i L_{yi} L_{yj} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{yy} \right) - c_j \left(2L_{yi}^2 L_k + 4L_i L_{yi} L_{yk} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{yy} \right) \quad (\text{B-12-8})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 N_i^{(2)}}{\partial y^2 \partial \bar{z}_i} &= \frac{\partial c_k}{\partial \bar{z}_i} \left(2L_{yi}^2 L_j + 4L_i L_{yi} L_{yj} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{yy} \right) + c_k \left(4L_{yi} \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_i} L_j + 4L_i \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_i} L_{yj} + 4L_i L_{yi} \frac{\partial L_{yj}}{\partial \bar{z}_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial (L_1 L_2 L_3)_{yy}}{\partial \bar{z}_i} \right) \\ &\quad - \frac{\partial c_j}{\partial \bar{z}_i} \left(2L_{yi}^2 L_k + 4L_i L_{yi} L_{yk} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{yy} \right) - c_j \left(4L_{yi} \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_i} L_k + 4L_i \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_i} L_{yk} + 4L_i L_{yi} \frac{\partial L_{yk}}{\partial \bar{z}_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial (L_1 L_2 L_3)_{yy}}{\partial \bar{z}_i} \right) \end{aligned} \quad (\text{B-13-8})$$

$$\frac{\partial^2 N_i^{(2)}}{\partial x \partial y} = c_k \left(2L_{yi} L_{xi} L_j + 2L_i L_{xi} L_{yj} + 2L_i L_{yi} L_{xj} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{xy} \right) - c_j \left(2L_{yi} L_{xi} L_k + 2L_i L_{xi} L_{yk} + 2L_i L_{yi} L_{xk} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{xy} \right) \quad (\text{B-12-9})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 N_i^{(2)}}{\partial x \partial y \partial \bar{z}_i} &= \frac{\partial c_k}{\partial \bar{z}_i} \left(2L_{yi} L_{xi} L_j + 2L_i L_{xi} L_{yj} + 2L_i L_{yi} L_{xj} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{xy} \right) \\ &\quad + c_k \left(2 \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_i} L_{xi} L_j + 2L_{yi} \frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_i} L_j + 2L_i \frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_i} L_{yj} + 2L_i L_{xi} \frac{\partial L_{yj}}{\partial \bar{z}_i} + 2L_i \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_i} L_{xj} + 2L_i L_{yi} \frac{\partial L_{xj}}{\partial \bar{z}_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial (L_1 L_2 L_3)_{xy}}{\partial \bar{z}_i} \right) \\ &\quad - \frac{\partial c_j}{\partial \bar{z}_i} \left(2L_{yi} L_{xi} L_k + 2L_i L_{xi} L_{yk} + 2L_i L_{yi} L_{xk} + \frac{1}{2} (L_1 L_2 L_3)_{xy} \right) \\ &\quad - c_j \left(2 \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_i} L_{xi} L_k + 2L_{yi} \frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_i} L_k + 2L_i \frac{\partial L_{xi}}{\partial \bar{z}_i} L_{yk} + 2L_i L_{xi} \frac{\partial L_{yk}}{\partial \bar{z}_i} + 2L_i \frac{\partial L_{yi}}{\partial \bar{z}_i} L_{xk} + 2L_i L_{yi} \frac{\partial L_{xk}}{\partial \bar{z}_i} + \frac{1}{2} \frac{\partial (L_1 L_2 L_3)_{xy}}{\partial \bar{z}_i} \right) \end{aligned} \quad (\text{B-13-9})$$

ここに、

$$(L_1 L_2 L_3)_{xx} = 2(L_{x1} L_{x2} L_{x3} + L_{x1} L_2 L_{x3} + L_1 L_{x2} L_{x3})$$

$$\frac{\partial (L_1 L_2 L_3)_{xx}}{\partial \bar{z}_i} = 2 \left(\frac{\partial L_{x1}}{\partial \bar{z}_i} L_{x2} L_{x3} + L_{x1} \frac{\partial L_{x2}}{\partial \bar{z}_i} L_{x3} + \frac{\partial L_{x1}}{\partial \bar{z}_i} L_2 L_{x3} + L_{x1} L_2 \frac{\partial L_{x3}}{\partial \bar{z}_i} + L_1 \frac{\partial L_{x2}}{\partial \bar{z}_i} L_{x3} + L_1 L_{x2} \frac{\partial L_{x3}}{\partial \bar{z}_i} \right)$$

$$(L_1 L_2 L_3)_{yy} = 2(L_{y1} L_{y2} L_{y3} + L_{y1} L_2 L_{y3} + L_1 L_{y2} L_{y3})$$

$$\frac{\partial (L_1 L_2 L_3)_{yy}}{\partial \bar{z}_i} = 2 \left(\frac{\partial L_{y1}}{\partial \bar{z}_i} L_{y2} L_{y3} + L_{y1} \frac{\partial L_{y2}}{\partial \bar{z}_i} L_{y3} + \frac{\partial L_{y1}}{\partial \bar{z}_i} L_2 L_{y3} + L_{y1} L_2 \frac{\partial L_{y3}}{\partial \bar{z}_i} + L_1 \frac{\partial L_{y2}}{\partial \bar{z}_i} L_{y3} + L_1 L_{y2} \frac{\partial L_{y3}}{\partial \bar{z}_i} \right)$$

$$(L_1 L_2 L_3)_{xy} = L_1 (L_{x2} L_{y3} + L_{y2} L_{x3}) + L_2 (L_{x1} L_{y3} + L_{y1} L_{x3}) + L_3 (L_{x1} L_{y2} + L_{y1} L_{x2})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial (L_1 L_2 L_3)_{xy}}{\partial \bar{z}_i} &= L_1 \left(\frac{\partial L_{x2}}{\partial \bar{z}_i} L_{y3} + L_{x2} \frac{\partial L_{y3}}{\partial \bar{z}_i} + \frac{\partial L_{y2}}{\partial \bar{z}_i} L_{x3} + L_{y2} \frac{\partial L_{x3}}{\partial \bar{z}_i} \right) \\ &\quad + L_2 \left(\frac{\partial L_{x1}}{\partial \bar{z}_i} L_{y3} + L_{x1} \frac{\partial L_{y3}}{\partial \bar{z}_i} + \frac{\partial L_{y1}}{\partial \bar{z}_i} L_{x3} + L_{y1} \frac{\partial L_{x3}}{\partial \bar{z}_i} \right) \\ &\quad + L_3 \left(\frac{\partial L_{x1}}{\partial \bar{z}_i} L_{y2} + L_{x1} \frac{\partial L_{y2}}{\partial \bar{z}_i} + \frac{\partial L_{y1}}{\partial \bar{z}_i} L_{x2} + L_{y1} \frac{\partial L_{x2}}{\partial \bar{z}_i} \right) \end{aligned}$$

剛性マトリクス

(面内変形要素)

$$\mathbf{k}_p = \iint \mathbf{B}_p^T \mathbf{D}_p \mathbf{B}_p h dx dy$$

要素の厚さを一定とした場合

$$\mathbf{k}_p = \mathbf{B}_p^T \mathbf{D}_p \mathbf{B}_p h S_e \quad (\text{B-14})$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_p}{\partial \bar{z}_i} = \frac{\partial \mathbf{B}_p^T}{\partial \bar{z}_i} \mathbf{D}_p \mathbf{B}_p h S_e + \mathbf{B}_p^T \mathbf{D}_p \frac{\partial \mathbf{B}_p}{\partial \bar{z}_i} h S_e + \mathbf{B}_p^T \mathbf{D}_p \mathbf{B}_p h \frac{\partial S_e}{\partial \bar{z}_i} \quad (\text{B-15})$$

(面外変形要素)

$$\mathbf{k}_b = \iint \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dx dy$$

3次のGauss型数値積分を適用する。

$$\mathbf{k}_b = \sum_{i=1}^7 \alpha_i \mathbf{B}_b(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i})^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}) S_e \quad (\text{B-16})$$

ここに、分点と係数は右表のとおり

この場合、剛性マトリクスの感度係数は次のように表せる。

$$\frac{\partial \mathbf{k}_b}{\partial \bar{z}_i} = \sum_{i=1}^7 \alpha_i \left(\frac{\partial \mathbf{B}_b^T}{\partial \bar{z}_i} \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b S_e + \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \frac{\partial \mathbf{B}_b}{\partial \bar{z}_i} S_e + \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b \frac{\partial S_e}{\partial \bar{z}_i} \right) \quad (\text{B-17})$$

Table B-1

i	α_i	L_{1i}	L_{2i}	L_{3i}
1	27/60	1/3	1/3	1/3
2	8/60	1/2	1/2	0
3	8/60	0	1/2	1/2
4	8/60	1/2	0	1/2
5	3/60	1	0	0
6	3/60	0	1	0
7	3/60	0	0	1

(面内ねじり要素)

数値計算上の不安定性を避けるために、面内の回転変位 θ_z に対し次のような剛性を付加する。

$$\mathbf{k}_t = 0.03 E h S_e \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-18})$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_t}{\partial \bar{z}_i} = 0.03 E h \frac{\partial S_e}{\partial \bar{z}_i} \begin{bmatrix} 1 & -0.5 & -0.5 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B-19})$$

以上の各変位成分に対応した剛性マトリクスの係数を重ね合わせ、18行18列の要素剛性マトリクス \mathbf{k} を作成する。全体座標系で表される剛性マトリクスとその感度係数は次式で表される。

$$\bar{\mathbf{k}} = \mathbf{T}^T \mathbf{k} \mathbf{T} \quad (\text{B-20})$$

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{k}}}{\partial \bar{z}_i} = \frac{\partial \mathbf{T}^T}{\partial \bar{z}_i} \mathbf{k} \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \frac{\partial \mathbf{k}}{\partial \bar{z}_i} \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \mathbf{k} \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \bar{z}_i} \quad (\text{B-21})$$

Gマトリクス

$$\mathbf{G} = \iint \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b dx dy$$

剛性マトリクスの場合と同様、数値積分を適用する。

$$\mathbf{G} = \sum_{i=1}^7 \alpha_i \mathbf{B}_b(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i})^T \mathbf{D}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b(L_{1i}, L_{2i}, L_{3i}) S_e \quad (\text{B-22})$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \bar{z}_i} = \sum_{i=1}^7 \alpha_i \left(\frac{\partial \mathbf{B}_b^T}{\partial \bar{z}_i} \mathbf{D}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b S_e + \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b^T \mathbf{D}_b \frac{\partial \mathbf{B}_b}{\partial \bar{z}_i} S_e + \mathbf{B}_b^T \mathbf{D}_b^T \mathbf{D}_b \mathbf{B}_b \frac{\partial S_e}{\partial \bar{z}_i} \right) \quad (\text{B-23})$$

等価節点力ベクトル (自重)

要素の単位面積あたりの重量を q とする。要素座標系における分布荷重 $\mathbf{q}(L_1, L_2, L_3) = [q_x, q_y, q_z]^T$ は次式によって表される。

$$\mathbf{q} = \mathbf{L}\bar{\mathbf{q}}, \quad \bar{\mathbf{q}} = [0, 0, q]^T$$

要素中立面の任意位置における変位を $\mathbf{u}(L_1, L_2, L_3) = [u, v, w]^T$ と表すと外力仕事 W は次式により表せる。

$$W = \iint \mathbf{u}^T \mathbf{q} dx dy$$

ここで、 \mathbf{u} は $\mathbf{d} = [u_1, v_1, w_1, \theta_{x1}, \theta_{y1}, \theta_{z1}, \dots, u_3, v_3, w_3, \theta_{x3}, \theta_{y3}, \theta_{z3}]^T$ を用いて次式のように表せる。

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}$$

ここに、

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & L_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1^{(0)} & N_1^{(1)} & N_1^{(2)} & 0 & 0 & 0 & N_2^{(0)} & N_2^{(1)} & N_2^{(2)} & 0 & 0 & 0 & N_3^{(0)} & N_3^{(1)} & N_3^{(2)} & 0 \end{bmatrix}$$

上式を用いると、外力仕事は次のように表される。

$$W = \iint \mathbf{u}^T \mathbf{q} dx dy = \mathbf{d}^T \iint \mathbf{N}^T dx dy \mathbf{L}\bar{\mathbf{q}} = \bar{\mathbf{d}}^T \mathbf{T}^T \iint \mathbf{N}^T dx dy \mathbf{L}\bar{\mathbf{q}}$$

従って、上式と外力仕事が等価となる節点外力 $\bar{\mathbf{f}}$ は次式のように表すことができる。

$$\bar{\mathbf{f}} = \mathbf{T}^T \iint \mathbf{N}^T dx dy \mathbf{L}\bar{\mathbf{q}} \quad (\text{B-24})$$

また、上式の感度係数は次式となる。

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{f}}}{\partial \bar{z}_i} = \frac{\partial \mathbf{T}^T}{\partial \bar{z}_i} \iint \mathbf{N}^T dx dy \mathbf{L}\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{T}^T \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \left(\iint \mathbf{N}^T dx dy \right) \mathbf{L}\bar{\mathbf{q}} + \mathbf{T}^T \iint \mathbf{N}^T dx dy \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \bar{z}_i} \bar{\mathbf{q}} \quad (\text{B-25})$$

上式の積分には、剛性マトリクスの場合と同様に3次のGauss型数値積分を適用する。また、形状関数の感度係数は次式により表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i^{(0)}}{\partial \bar{z}_i} &= 0 \\ \frac{\partial N_i^{(1)}}{\partial \bar{z}_i} &= \frac{\partial b_k}{\partial \bar{z}_i} \left(L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) - \frac{\partial b_j}{\partial \bar{z}_i} \left(L_i^2 L_k + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \\ \frac{\partial N_i^{(2)}}{\partial \bar{z}_i} &= \frac{\partial c_k}{\partial \bar{z}_i} \left(L_i^2 L_j + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) - \frac{\partial c_j}{\partial \bar{z}_i} \left(L_i^2 L_k + \frac{1}{2} L_1 L_2 L_3 \right) \end{aligned} \quad (\text{B-26})$$

座標変換マトリクス

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{bmatrix} \quad (\text{C-5})$$

$$\lambda = \begin{cases} \begin{bmatrix} C_x & C_y & C_z \\ -C_x C_y / \bar{C}_{xz} & \bar{C}_{xz} & -C_y C_z / \bar{C}_{xz} \\ -C_z / \bar{C}_{xz} & 0 & C_x / \bar{C}_{xz} \end{bmatrix} & (\bar{C}_{xz} \neq 0 \text{ のとき}) \\ \begin{bmatrix} 0 & C_y & C_z \\ -C_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & (\bar{C}_{xz} = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (\text{C-6})$$

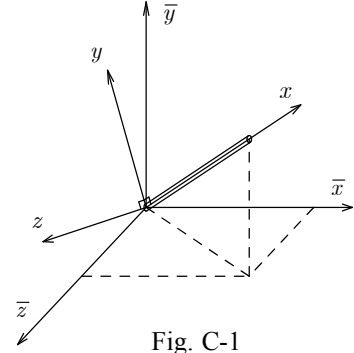


Fig. C-1

ただし、 $C_x = \frac{x_j - x_i}{l_e}, C_y = \frac{y_j - y_i}{l_e}, C_z = \frac{z_j - z_i}{l_e}, C_{xz} = \sqrt{C_x^2 + C_z^2}$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial r_{\alpha i}} = \begin{cases} \begin{bmatrix} C'_x & C'_y & C'_z \\ (-C'_x C_y \bar{C}_{xz} - C_x C'_y \bar{C}_{xz} + C_x C_y \bar{C}'_{xz}) / \bar{C}_{xz}^2 & \bar{C}'_{xz} & (-C'_y C_z \bar{C}_{xz} - C_y C'_z \bar{C}_{xz} + C_y C_z \bar{C}'_{xz}) / \bar{C}_{xz}^2 \\ (-C'_z \bar{C}_{xz} + C_z \bar{C}'_{xz}) / \bar{C}_{xz}^2 & 0 & (-C'_x \bar{C}_{xz} + C_x \bar{C}'_{xz}) / \bar{C}_{xz}^2 \end{bmatrix} & (\bar{C}_{xz} \neq 0 \text{ のとき}) \\ \begin{bmatrix} 0 & C'_y & C'_z \\ -C'_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & (\bar{C}_{xz} = 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (\text{C-7})$$

$$\frac{\partial C_x}{\partial x_i} = \frac{-1 + C_x^2}{l_e}, \quad \frac{\partial C_y}{\partial x_i} = \frac{C_x C_y}{l_e}, \quad \frac{\partial C_z}{\partial x_i} = \frac{C_z C_x}{l_e}, \quad \frac{\partial C_\alpha}{\partial x_j} = -\frac{\partial C_\alpha}{\partial x_i} \quad (\alpha \in x, y, z)$$

$$\frac{\partial C_x}{\partial y_i} = \frac{C_x C_y}{l_e}, \quad \frac{\partial C_y}{\partial y_i} = \frac{-1 + C_y^2}{l_e}, \quad \frac{\partial C_z}{\partial y_i} = \frac{C_y C_z}{l_e}, \quad \frac{\partial C_\alpha}{\partial y_j} = -\frac{\partial C_\alpha}{\partial y_i} \quad (\alpha \in x, y, z)$$

$$\frac{\partial C_x}{\partial z_i} = \frac{C_x C_z}{l_e}, \quad \frac{\partial C_y}{\partial z_i} = \frac{C_y C_z}{l_e}, \quad \frac{\partial C_z}{\partial z_i} = \frac{-1 + C_z^2}{l_e}, \quad \frac{\partial C_\alpha}{\partial z_j} = -\frac{\partial C_\alpha}{\partial z_i} \quad (\alpha \in x, y, z)$$

$$\frac{\partial \bar{C}_{xz}}{\partial x_i} = \frac{C_x}{l_e \bar{C}_{xz}} (C_x^2 + C_z^2 - 1), \quad \frac{\partial \bar{C}_{xz}}{\partial y_i} = \frac{C_y}{l_e \bar{C}_{xz}} (C_x^2 + C_z^2), \quad \frac{\partial \bar{C}_{xz}}{\partial x_i} = \frac{C_z}{l_e \bar{C}_{xz}} (C_x^2 + C_z^2 - 1), \quad \frac{\partial \bar{C}_{xz}}{\partial \beta_j} = -\frac{\partial \bar{C}_{xz}}{\partial \beta_i} \quad (\beta \in x, y, z)$$

等価節点力ベクトル (自重)

単位長さあたりの重さを q とすると、要素座標系における分布外力 \mathbf{q} は次式で表せる。

$$\mathbf{q}(\xi) = [-q \sin \gamma \quad -q \cos \gamma \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T$$

ここに、 $\sin \gamma = C_y / \sqrt{C_x^2 + C_z^2}, \cos \gamma = \sqrt{C_x^2 + C_z^2}$

この場合、等価節点力ベクトル (要素座標系) は次式により表される。(感度係数は省略)

$$\mathbf{f} = l_e \int_0^1 \mathbf{N}^T \mathbf{q} d\xi = \begin{bmatrix} -\frac{ql_e}{2} \sin \gamma & -\frac{ql_e}{2} \cos \gamma & 0 & 0 & 0 & -\frac{ql_e^2}{12} \cos \gamma & -\frac{ql_e}{2} \sin \gamma & -\frac{ql_e}{2} \cos \gamma & 0 & 0 & 0 & +\frac{ql_e^2}{12} \cos \gamma \end{bmatrix} \quad (\text{C-8})$$

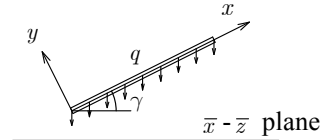


Fig. C-2

付録 D

平面直線材要素による定式化

感度解析部分詳細

本文中で示したように、対称分岐型の座屈荷重係数の感度係数は次式によって表される。

$$\frac{\partial \Lambda^c}{\partial r_{\alpha k}} = -\phi_1^T \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{K}}_T^c}{\partial r_{\alpha k}} + \frac{\partial \bar{\mathbf{K}}_T^c}{\partial \bar{D}_l} \frac{\partial \bar{D}_l^c}{\partial r_{\alpha k}} \right) \phi_1 / \phi_1^T \frac{\partial \bar{\mathbf{K}}_T^c}{\partial \bar{D}_l} \bar{D}_{Fl} \phi_1 \quad (\text{D-1})$$

ここに、 $\partial \bar{D}_l^c / \partial r_{\alpha k}$ 、 \bar{D}_{Fl} はそれぞれ次式で表される $\partial \bar{\mathbf{D}}_Q / \partial r_{\alpha k}$ 、 $\bar{\mathbf{D}}_F$ の第 l 成分を表す。

$$\frac{\partial \bar{D}_l^c}{\partial r_{\alpha k}} = -\Phi \lambda^{-1} \Phi^T \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}^c}{\partial r_{\alpha k}}, \quad \bar{\mathbf{D}}_F = \Phi \lambda^{-1} \Phi^T \bar{\mathbf{F}} \quad (\text{D-2})$$

○ $\partial \bar{\mathbf{K}}_T^c / \partial r_{\alpha k}$ について

(D-1)式中に含まれる $\partial \bar{\mathbf{K}}_T^c / \partial r_{\alpha k}$ を導出する。全体座標系における接線剛性 $\bar{\mathbf{K}}_T$ は次式で表される要素接線剛性 $\bar{\mathbf{k}}_T$ を全ての要素について重ね合わせることで得られる。

$$\bar{\mathbf{k}}_T = \mathbf{T}^T (\mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_{eT} \mathbf{T}_e + \mathbf{k}_{G2}) \mathbf{T} \quad (\text{D-3})$$

上式を節点座標 $r_{\alpha i}$ で偏微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{k}}_T}{\partial r_{\alpha k}} = \frac{\partial \mathbf{T}^T}{\partial r_{\alpha k}} (\mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_{eT} \mathbf{T}_e + \mathbf{k}_{G2}) \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \left(\frac{\partial \mathbf{T}_e^T}{\partial r_{\alpha k}} \mathbf{k}_{eT} \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_e^T \frac{\partial \mathbf{k}_{eT}}{\partial r_{\alpha k}} \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_{eT} \frac{\partial \mathbf{T}_e}{\partial r_{\alpha k}} + \frac{\partial \mathbf{k}_{G2}}{\partial r_{\alpha k}} \right) \mathbf{T} + \mathbf{T}^T (\mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_{eT} \mathbf{T}_e + \mathbf{k}_{G2}) \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial r_{\alpha k}} \quad (\text{D-4})$$

上式に対し $\bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{d}}^c$ を代入し、全ての要素に対し重ね合わせを行うことで $\partial \bar{\mathbf{K}}_T^c / \partial r_{\alpha k}$ が得られる。

○ $\partial \mathbf{T} / \partial r_{\alpha k}$ について

(D-4)式中に含まれる $\partial \mathbf{T} / \partial r_{\alpha k}$ を示す。座標変換マトリクス \mathbf{T} は次式により表される。

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{L} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D-5})$$

ここに、 $\sin \phi = (r_{yj} - r_{yi}) / l_e$ 、 $\cos \phi = (r_{xj} - r_{xi}) / l_e$

また、 i, j は要素を構成する節点の節点番号を表す。

上式を節点座標 $r_{\alpha k}$ で偏微分することで $\partial \mathbf{T} / \partial r_{\alpha k}$ が得られる。本文中では節点 y 座標のみ未知量としているので、以下に r_{yk} による偏微分を示す。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial r_{yk}} &= \begin{bmatrix} -\sin^2 \phi / l_e & \sin \phi \cos \phi / l_e & 0 \\ -\sin \phi \cos \phi / l_e & -\sin^2 \phi / l_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (k = i) \\ \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial r_{yk}} &= -\begin{bmatrix} -\sin^2 \phi / l_e & \sin \phi \cos \phi / l_e & 0 \\ -\sin \phi \cos \phi / l_e & -\sin^2 \phi / l_e & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (k = j) \\ \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial r_{yk}} &= \mathbf{0} \quad (k \neq i, j) \end{aligned} \quad (\text{D-6})$$

○ $\partial \mathbf{T}_e / \partial r_{\alpha k}$ について

(D-4)式に含まれる $\partial \mathbf{T}_e / \partial r_{\alpha k}$ を示す。 \mathbf{T}_e は次式で表せる。

$$\mathbf{T}_e = \begin{bmatrix} -\cos R & -\sin R & 0 & \cos R & \sin R & 0 \\ -\sin R & \cos R & 1 & \sin R & -\cos R & 0 \\ \frac{l_e + u_e}{l_e + u_e} & \frac{l_e + u_e}{l_e + u_e} & 0 & \frac{l_e + u_e}{l_e + u_e} & \frac{l_e + u_e}{l_e + u_e} & 0 \\ -\sin R & \cos R & 0 & \sin R & -\cos R & 1 \\ \frac{l_e + u_e}{l_e + u_e} & \frac{l_e + u_e}{l_e + u_e} & 0 & \frac{l_e + u_e}{l_e + u_e} & \frac{l_e + u_e}{l_e + u_e} & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{D-7})$$

上式を $r_{\alpha k}$ で偏微分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{T}_e}{\partial r_{\alpha k}} = \begin{bmatrix} t'_1 & t'_2 & 0 & -t'_1 & -t'_2 & 0 \\ t'_3 & t'_4 & 0 & -t'_3 & -t'_4 & 0 \\ t'_3 & t'_4 & 0 & -t'_3 & -t'_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D-8})$$

$$\begin{aligned} t'_1 &= \sin R \cdot R', & t'_2 &= -\cos R \cdot R' \\ t'_3 &= \frac{-\cos R \cdot R' (l_e + u_e) + \sin R (l'_e + u'_e)}{(l_e + u_e)^2}, & t'_4 &= \frac{-\sin R \cdot R' (l_e + u_e) - \cos R (l'_e + u'_e)}{(l_e + u_e)^2} \end{aligned}$$

ここに、()' は $r_{\alpha k}$ による偏微分を意味する。

○ $\partial \mathbf{d}_e / \partial r_{\alpha k}$ について

(D-8)式に含まれる $\partial \mathbf{d}_e / \partial r_{\alpha k} = [u'_e, \theta'_{ei}, \theta'_{ej}]^T$ 及び $\partial R / \partial r_{\alpha k} = R'$ を示す。移動座標系における要素節点変位ベクトル \mathbf{d}_e は次式により表される。

$$\begin{aligned} u_e &= \sqrt{(u_j - u_i + l_e)^2 + (v_j - v_i)^2} \\ \theta_{ei} &= \theta_i - R, & \theta_{ej} &= \theta_j - R, & R &= \tan^{-1} \left(\frac{v_j - v_i}{u_j - u_i + l_e} \right) \end{aligned} \quad (\text{D-9})$$

上式を $r_{\alpha k}$ で偏微分すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_e}{\partial r_{\alpha k}} &= u'_e = \frac{(u_j - u_i + l_e)(u'_j - u'_i + l'_e) + (v_j - v_i)(v'_j - v'_i)}{\sqrt{(u_j - u_i + l_e)^2 + (v_j - v_i)^2}} - l'_e \\ \frac{\partial \theta_{ei}}{\partial r_{\alpha k}} &= \theta'_{ei} = \theta'_i - R', & \frac{\partial \theta_{ej}}{\partial r_{\alpha k}} &= \theta'_{ej} = \theta'_j - R' \\ \frac{\partial R}{\partial r_{\alpha k}} &= R' = \frac{(v'_j - v'_i)(u_j - u_i + l_e) - (v_j - v_i)(u'_j - u'_i + l'_e)}{(u_j - u_i + l_e)^2 + (v_j - v_i)^2} \end{aligned} \quad (\text{D-10})$$

○ $\partial \mathbf{d} / \partial r_{\alpha k}$ について

(D-10)式に含まれる $\partial \mathbf{d} / \partial r_{\alpha k} = [u'_i, v'_i, \theta'_i, u'_j, v'_j, \theta'_j]^T$ を示す。変形前の局所座標系で測られる節点変位ベクトル \mathbf{d} は系全体の節点変位ベクトル $\bar{\mathbf{d}}$ から要素成分を取り出した $\bar{\mathbf{d}}$ を座標変換することで得られる。

$$\mathbf{d} = \mathbf{T} \bar{\mathbf{d}} \quad (\text{D-11})$$

(D-1)で示した感度係数は臨界点 $C(\bar{\mathbf{D}}^c, \Lambda^c)$ において評価される。この場合、 $\bar{\mathbf{D}}^c, \Lambda^c$ が既知量として与えられる。(D-1)式を導出する際に既に釣合方程式は条件式として用いられており、今目的としている $\partial \mathbf{d} / \partial r_{\alpha k}$ に対し、上式の $\bar{\mathbf{d}}$ は節点座標の関数ではないことに注意を要する。

上式を $r_{\alpha k}$ で偏微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial \mathbf{d}}{\partial r_{\alpha k}} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial r_{\alpha k}} \bar{\mathbf{d}} \quad (\text{D-12})$$

○ $\partial l_e / \partial r_{\alpha k}$ について

(D-8)式中に含まれる $\partial l_e / \partial r_{\alpha k} = l'_e$ を示す。要素長 l_e は次式で表せる。

$$l_e = \sqrt{(r_{xj} - r_{xi})^2 + (r_{yj} - r_{yi})^2} \quad (D-13)$$

i, j は要素を構成する節点の節点番号を表す。上式を $r_{\alpha k}$ で偏微分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial l_e}{\partial r_{yk}} = \begin{cases} -\cos \phi & (k = i) \\ \cos \phi & (k = j) \\ 0 & (k \neq i, j) \end{cases} \quad (D-14)$$

○ $\partial \mathbf{k}_{eT} / \partial r_{\alpha k}$ について

(D-4)式中に含まれる $\partial \mathbf{k}_{eT} / \partial r_{\alpha k}$ を示す。 \mathbf{k}_{eT} は次式で表せる。

$$\mathbf{k}_{eT} = \mathbf{k}_{eA} + \mathbf{k}_{eG} \quad (D-15)$$

$$\mathbf{k}_{eA} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_e} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right)^2 & \frac{EA}{30} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) (4\theta_{ei} - \theta_{ej}) & \frac{EA}{30} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) (-\theta_{ei} + 4\theta_{ej}) \\ \frac{4EI}{l_e} + \frac{EA l'_e}{210} (12\theta_{ei}^2 - 3\theta_{ei}\theta_{ej} + \theta_{ej}^2) & \frac{2EI}{l_e} + \frac{EA l'_e}{420} (-3\theta_{ei}^2 + 4\theta_{ei}\theta_{ej} - 3\theta_{ej}^2) & \frac{4EI}{l_e} + \frac{EA l'_e}{210} (\theta_{ei}^2 - 3\theta_{ei}\theta_{ej} + 12\theta_{ej}^2) \\ sym & & \end{bmatrix} \quad \mathbf{k}_{eG} = \frac{N'_e l'_e}{l_e + u_e} \begin{bmatrix} \frac{1}{l_e} & 0 & 0 \\ \frac{2l'_e}{15} & -\frac{l'_e}{30} & \\ sym & & \frac{2l'_e}{15} \end{bmatrix}$$

上式を $r_{\alpha k}$ で偏微分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{eT}}{\partial r_{\alpha k}} = \frac{\partial \mathbf{k}_{eA}}{\partial r_{\alpha k}} + \frac{\partial \mathbf{k}_{eG}}{\partial r_{\alpha k}} \quad (D-16)$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{eA}(1,1)}{\partial r_{\alpha k}} = -\frac{EA}{l_e^2} l'_e \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right)^2 + \frac{2EA}{l_e} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) \frac{u'_e l'_e - u_e l''_e}{l_e^2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{eA}(1,2)}{\partial r_{\alpha k}} = \frac{EA}{30} \frac{u'_e l'_e - u_e l''_e}{l_e^2} (4\theta_{ei} - \theta_{ej}) + \frac{EA}{30} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) (4\theta'_{ei} - \theta'_{ej})$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{eA}(1,3)}{\partial r_{\alpha k}} = \frac{EA}{30} \frac{u'_e l'_e - u_e l''_e}{l_e^2} (-\theta_{ei} + 4\theta_{ej}) + \frac{EA}{30} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) (-\theta'_{ei} + 4\theta'_{ej})$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{eA}(2,2)}{\partial r_{\alpha k}} = -\frac{4EI}{l_e^2} l'_e + \frac{EA l'_e}{210} (12\theta_{ei}^2 - 3\theta_{ei}\theta_{ej} + \theta_{ej}^2) + \frac{EA l'_e}{210} (24\theta_{ei}\theta'_{ei} - 3\theta_{ei}'\theta_{ej} - 3\theta_{ei}\theta'_{ej} + 2\theta_{ej}\theta'_{ej})$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{eA}(2,3)}{\partial r_{\alpha k}} = -\frac{2EI}{l_e^2} l'_e + \frac{EA l'_e}{420} (-3\theta_{ei}^2 + 4\theta_{ei}\theta_{ej} - 3\theta_{ej}^2) + \frac{EA l'_e}{420} (-6\theta_{ei}\theta'_{ei} + 4\theta_{ei}'\theta_{ej} + 4\theta_{ei}\theta'_{ej} - 6\theta_{ej}\theta'_{ej})$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{eA}(3,3)}{\partial r_{\alpha k}} = -\frac{4EI}{l_e^2} l'_e + \frac{EA l'_e}{210} (\theta_{ei}^2 - 3\theta_{ei}\theta_{ej} + 12\theta_{ej}^2) + \frac{EA l'_e}{210} (2\theta_{ei}\theta'_{ei} - 3\theta_{ei}'\theta_{ej} - 3\theta_{ei}\theta'_{ej} + 24\theta_{ej}\theta'_{ej}) \quad (D-17)$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{eG}}{\partial r_{\alpha k}} = \frac{N'_e l'_e (l_e + u_e) - N_e (u'_e l'_e - u_e l''_e)}{(l_e + u_e)^2} \begin{bmatrix} \frac{1}{l_e} & 0 & 0 \\ \frac{2l'_e}{15} & -\frac{l'_e}{30} & \\ sym & & \frac{2l'_e}{15} \end{bmatrix} + \frac{N_e l'_e}{l_e + u_e} \begin{bmatrix} -\frac{l'_e}{l_e^2} & 0 & 0 \\ \frac{2l'_e}{15} & -\frac{l'_e}{30} & \\ sym & & \frac{2l'_e}{15} \end{bmatrix} \quad (D-18)$$

○ $\partial \mathbf{q}_e / \partial r_{\alpha k}$ について

(D-4)式に含まれる $\partial \mathbf{q}_e / \partial r_{\alpha k} = [N'_e, M'_{ei}, M'_{ej}]^T$ を示す。 \mathbf{q}_e は次式で表せる。

$$\mathbf{q}_e = \mathbf{k}_{eS} \mathbf{d} \quad (\text{D-19})$$

上式を $r_{\alpha k}$ で偏微分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{q}_e}{\partial r_{\alpha k}} = \frac{\partial \mathbf{k}_{eS}}{\partial r_{\alpha k}} \mathbf{d}_e + \mathbf{k}_{eS} \frac{\partial \mathbf{d}_e}{\partial r_{\alpha k}} \quad (\text{D-20})$$

○ $\partial \mathbf{k}_{eS} / \partial r_{\alpha k}$ について

(D-20)式に含まれる $\partial \mathbf{k}_{eS} / \partial r_{\alpha k}$ を示す。 \mathbf{k}_{eS} は次式で表せる。

$$\mathbf{k}_{eS} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l_e} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) \left(1 + \frac{u_e}{2l_e}\right) & \frac{EA}{60} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) (4\theta_{ei} - \theta_{ej}) & \frac{EA}{60} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) (-\theta_{ei} + 4\theta_{ej}) \\ \frac{4EI}{l_e} + \frac{EA}{15} u_e + \frac{EAl_e}{420} (12\theta_{ei}^2 - 3\theta_{ei}\theta_{ej} + \theta_{ej}^2) & \frac{2EI}{l_e} - \frac{EA}{60} u_e + \frac{EAl_e}{840} (-3\theta_{ei}^2 + 4\theta_{ei}\theta_{ej} - 3\theta_{ej}^2) & \\ \text{sym} & \frac{4EI}{l_e} + \frac{EA}{15} u_e + \frac{EAl_e}{420} (\theta_{ei}^2 - 3\theta_{ei}\theta_{ej} + 12\theta_{ej}^2) & \end{bmatrix} \quad (\text{D-21})$$

上式を $r_{\alpha k}$ で偏微分すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{k}_{eS}(1,1)}{\partial r_{\alpha i}} &= -\frac{EA}{l_e^2} l'_e \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) \left(1 + \frac{u_e}{2l_e}\right) + \frac{EA}{l_e} \frac{u'_e l'_e - u_e l''_e}{l_e^2} \left(1 + \frac{u_e}{2l_e}\right) + \frac{EA}{l_e} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) \frac{u'_e l'_e - u_e l''_e}{2l_e^2} \\ \frac{\partial \mathbf{k}_{eS}(1,2)}{\partial r_{\alpha i}} &= \frac{EA}{60} \frac{u'_e l'_e - u_e l''_e}{l_e^2} (4\theta_{ei} - \theta_{ej}) + \frac{EA}{60} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) (4\theta'_{ei} - \theta'_{ej}) \\ \frac{\partial \mathbf{k}_{eS}(1,3)}{\partial r_{\alpha i}} &= \frac{EA}{60} \frac{u'_e l'_e - u_e l''_e}{l_e^2} (-\theta_{ei} + 4\theta_{ej}) + \frac{EA}{60} \left(1 + \frac{u_e}{l_e}\right) (-\theta'_{ei} + 4\theta'_{ej}) \\ \frac{\partial \mathbf{k}_{eS}(2,2)}{\partial r_{\alpha i}} &= -\frac{4EI}{l_e^2} l'_e + \frac{EA}{15} u'_e + \frac{EAl'_e}{420} (12\theta_{ei}^2 - 3\theta_{ei}\theta_{ej} + \theta_{ej}^2) + \frac{EAl_e}{420} (24\theta_{ei}\theta'_{ei} - 3\theta'_{ei}\theta_{ej} - 3\theta_{ei}\theta'_{ej} + 2\theta_{ej}\theta'_{ej}) \\ \frac{\partial \mathbf{k}_{eS}(2,3)}{\partial r_{\alpha i}} &= -\frac{4EI}{l_e^2} l'_e - \frac{EA}{60} u'_e + \frac{EAl'_e}{840} (-3\theta_{ei}^2 + 4\theta_{ei}\theta_{ej} - 3\theta_{ej}^2) + \frac{EAl_e}{840} (-6\theta_{ei}\theta'_{ei} + 4\theta'_{ei}\theta_{ej} + 4\theta_{ei}\theta'_{ej} - 6\theta_{ej}\theta'_{ej}) \\ \frac{\partial \mathbf{k}_{eS}(3,3)}{\partial r_{\alpha i}} &= -\frac{4EI}{l_e^2} l'_e + \frac{EA}{15} u'_e + \frac{EAl'_e}{420} (\theta_{ei}^2 - 3\theta_{ei}\theta_{ej} + 12\theta_{ej}^2) + \frac{EAl_e}{420} (2\theta_{ei}\theta'_{ei} - 3\theta'_{ei}\theta_{ej} - 3\theta_{ei}\theta'_{ej} + 24\theta_{ej}\theta'_{ej}) \end{aligned} \quad (\text{D-22})$$

○ $\partial \mathbf{k}_{G2} / \partial r_{\alpha k}$ について

(D-4)式に含まれる $\partial \mathbf{k}_{G2} / \partial r_{\alpha k}$ を示す。 \mathbf{k}_{G2} は次式で表せる。

$$\mathbf{k}_{G2} = \begin{bmatrix} a & b & 0 & -a & -b & 0 \\ & c & 0 & -b & -c & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & a & b & 0 \\ \text{sym} & & & & c & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} a &= \frac{1}{l_e + u_e} \{N_e \sin^2 R - 2Q_e \sin R \cos R\} \\ b &= \frac{-1}{l_e + u_e} \{N_e \sin R \cos R + Q_e (\sin^2 R - \cos^2 R)\} \\ c &= \frac{1}{l_e + u_e} \{N_e \cos^2 R + 2Q_e \sin R \cos R\} \\ Q_e &= \frac{M_{ei} + M_{ej}}{l_e + u_e} \end{aligned} \quad (\text{D-23})$$

上式を $r_{\alpha k}$ で偏微分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{G2}}{\partial r_{\alpha k}} = \begin{bmatrix} a' & b' & 0 & -a' & -b' & 0 \\ & c' & 0 & -b' & -c' & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & a' & b' & 0 \\ sym & & & & c' & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D-24})$$

$$a' = \frac{2 \sin R \cos R (R' N_e - Q_e') + \sin^2 R \cdot N_e' - 2(\cos^2 R - \sin^2 R) R' Q_e}{(l_e + u_e)} - \frac{(\sin^2 R \cdot N_e - 2 \sin R \cos R \cdot Q_e)(l_e' + u_e')}{(l_e + u_e)^2}$$

$$b' = -\frac{\sin R \cos R (N_e' + 4R' Q_e') + (\cos^2 R - \sin^2 R)(R' N_e - Q_e')}{(l_e + u_e)} + \frac{(\sin R \cos R \cdot N_e + (\cos^2 R - \sin^2 R) Q_e)(l_e' + u_e')}{(l_e + u_e)^2}$$

$$c' = \frac{-2 \sin R \cos R (R' N_e - Q_e') + \cos^2 R \cdot N_e' - 2(\cos^2 R - \sin^2 R) R' Q_e}{(l_e + u_e)} - \frac{(\cos^2 R \cdot N_e - 2 \sin R \cos R \cdot Q_e)(l_e' + u_e')}{(l_e + u_e)^2}$$

ここに、

$$Q_e' = \frac{(M_{ei}' + M_{ej}') (l_e + u_e) - (M_{ei} + M_{ej}) (l_e' + u_e')}{(l_e + u_e)^2}$$

○ $\partial \bar{\mathbf{K}}_T^c / \partial \bar{D}_i$ について

(D-1)式中に含まれ $\partial \bar{\mathbf{K}}_T^c / \partial \bar{D}_i$ を導出する。全体座標系における接線剛性 $\bar{\mathbf{K}}_T$ は次式で表される要素接線剛性 $\bar{\mathbf{k}}_T$ を全ての要素について重ね合わせることで得られる。

$$\bar{\mathbf{K}}_T = \mathbf{T}^T (\mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_{eT} \mathbf{T}_e + \mathbf{k}_{G2}) \mathbf{T}$$

上式を \bar{D}_i で偏微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{K}}_T}{\partial \bar{D}_i} = \mathbf{T}^T \left(\frac{\partial \mathbf{T}_e^T}{\partial \bar{D}_i} \mathbf{k}_{eT} \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_e^T \frac{\partial \mathbf{k}_{eT}}{\partial \bar{D}_i} \mathbf{T}_e + \mathbf{T}_e^T \mathbf{k}_{eT} \frac{\partial \mathbf{T}_e}{\partial \bar{D}_i} + \frac{\partial \mathbf{k}_{G2}}{\partial \bar{D}_i} \right) \mathbf{T} \quad (\text{D-25})$$

○ $\partial \mathbf{T}_e / \partial \bar{D}_i$ について

(D-25)式に含まれる $\partial \mathbf{T}_e / \partial \bar{D}_i$ を示す。(D-7)式を \bar{D}_i で偏微分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{T}_e}{\partial \bar{D}_i} = \begin{bmatrix} t'_1 & t'_2 & 0 & -t'_1 & -t'_2 & 0 \\ t'_3 & t'_4 & 0 & -t'_3 & -t'_4 & 0 \\ t'_3 & t'_4 & 0 & -t'_3 & -t'_4 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C-26})$$

$$t'_1 = \sin R \cdot R', \quad t'_2 = -\cos R \cdot R'$$

$$t'_3 = \frac{-\cos R \cdot R' (l_e + u_e) + \sin R \cdot u_e'}{(l_e + u_e)^2}, \quad t'_4 = \frac{-\sin R \cdot R' (l_e + u_e) - \cos R \cdot u_e'}{(l_e + u_e)^2}$$

ここに (') は \bar{D}_i による偏微分を意味する。

○ $\partial \mathbf{d}_e / \partial \bar{D}_i$ について

(D-26)式に含まれる $\partial \mathbf{d}_e / \partial \bar{D}_i = [u_e', \theta_{ei}', \theta_{ej}']^T$ 及び $\partial R / \partial \bar{D}_i = R'$ を示す。(D-9)式を \bar{D}_i で偏微分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial u_e}{\partial \bar{D}_i} = u_e' = \frac{(u_j - u_i + l_e)(u_j' - u_i') + (v_j - v_i)(v_j' - v_i')}{\sqrt{(u_j - u_i + l_e)^2 + (v_j - v_i)^2}}$$

$$\frac{\partial \theta_{ei}}{\partial \bar{D}_i} = \theta_{ei}' = \theta_{ei}' - R', \quad \frac{\partial \theta_{ej}}{\partial \bar{D}_i} = \theta_{ej}' = \theta_{ej}' - R',$$

$$\frac{\partial R}{\partial \bar{D}_i} = R' = \frac{(v_j' - v_i')(u_j - u_i + l_e) - (v_j - v_i)(u_j' - u_i')}{(u_j - u_i + l_e)^2 + (v_j - v_i)^2} \quad (\text{D-27})$$

○ $\partial \mathbf{d}_e / \partial \bar{D}_l$ について

(D-27)式に含まれる $\partial \mathbf{d} / \partial \bar{D}_l = [u'_i, v'_i, \theta'_i, u'_j, v'_j, \theta'_j]^T$ を求める。(D-11)式の関係より次式で表される。

$$\partial d_k / \partial \bar{D}_l = \begin{cases} \mathbf{T}(k, n) & (m = i) \\ \mathbf{T}(k, n + 3) & (m = j) \\ 0 & (m \neq i, j) \end{cases} \quad (\text{D-28})$$

ここに、 i, j は要素を構成する節点の節点番号を表し、また、 m, n は変位成分 \bar{D}_l に対応する節点の節点番号及び u, v, θ の各方向に対応する番号 $n (= 1, 2, 3)$ を表し、 $l = 3(m-1) + n$ である。

○ $\partial \mathbf{k}_{eT} / \partial \bar{D}_l$ について

(D-25)式に含まれる $\partial \mathbf{k}_{eT} / \partial \bar{D}_l$ を示す。(D-15)式を \bar{D}_l で偏微分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{eT}}{\partial \bar{D}_l} = \frac{\partial \mathbf{k}_{eA}}{\partial \bar{D}_l} + \frac{\partial \mathbf{k}_{eG}}{\partial \bar{D}_l} \quad (\text{D-29})$$

ここに、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{k}_{eA}(1,1)}{\partial \bar{D}_l} &= 2 \frac{EA}{l_e} \frac{u'_e}{l_e} \left(1 + \frac{u_e}{l_e} \right) \\ \frac{\partial \mathbf{k}_{eA}(1,2)}{\partial \bar{D}_l} &= \frac{EA}{30} \frac{u'_e}{l_e} (4\theta'_{ei} - \theta'_{ej}) + \frac{EA}{30} \left(1 + \frac{u_e}{l_e} \right) (4\theta'_{ei} - \theta'_{ej}) \\ \frac{\partial \mathbf{k}_{eA}(1,3)}{\partial \bar{D}_l} &= \frac{EA}{30} \frac{u'_e}{l_e} (-\theta'_{ei} + 4\theta'_{ej}) + \frac{EA}{30} \left(1 + \frac{u_e}{l_e} \right) (-\theta'_{ei} + 4\theta'_{ej}) \\ \frac{\partial \mathbf{k}_{eA}(2,2)}{\partial \bar{D}_l} &= \frac{EAl'_e}{210} (24\theta'_{ei}\theta'_{ei} - 3\theta'_{ei}\theta'_{ej} - 3\theta'_{ei}\theta'_{ej} + 2\theta'_{ej}\theta'_{ej}) \\ \frac{\partial \mathbf{k}_{eA}(2,3)}{\partial \bar{D}_l} &= \frac{EAl'_e}{420} (-6\theta'_{ei}\theta'_{ei} + 4\theta'_{ei}\theta'_{ej} + 4\theta'_{ei}\theta'_{ej} - 6\theta'_{ej}\theta'_{ej}) \\ \frac{\partial \mathbf{k}_{eA}(3,3)}{\partial \bar{D}_l} &= \frac{EAl'_e}{210} (2\theta'_{ei}\theta'_{ei} - 3\theta'_{ei}\theta'_{ej} - 3\theta'_{ei}\theta'_{ej} + 24\theta'_{ej}\theta'_{ej}) \end{aligned} \quad (\text{D-30})$$

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{eG}}{\partial \bar{D}_l} = \frac{N'_e l_e (l_e + u_e) - N_e u'_e l_e}{(l_e + u_e)^2} \begin{bmatrix} 1/l_e & 0 & 0 \\ sym & 2l_e/15 & -l_e/30 \\ & & 2l_e/15 \end{bmatrix} \quad (\text{D-31})$$

○ $\partial \mathbf{k}_{e2} / \partial \bar{D}_l$ について

(D-25)式に含まれる $\partial \mathbf{k}_{e2} / \partial \bar{D}_l$ を示す。(D-23)式を \bar{D}_l で偏微分すると次式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{k}_{e2}}{\partial \bar{D}_l} = \begin{bmatrix} a' & b' & 0 & -a' & -b' & 0 \\ c' & 0 & -b' & -c' & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & a' & b' & 0 & 0 \\ sym & & & c' & 0 & 0 \\ & & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{D-32})$$

$$\begin{aligned} a' &= \frac{2 \sin R \cos R (R' N_e - Q'_e) + \sin^2 R \cdot N'_e - 2(\cos^2 R - \sin^2 R) R' Q_e}{(l_e + u_e)} - \frac{(\sin^2 R \cdot N_e - 2 \sin R \cos R \cdot Q_e) u'_e}{(l_e + u_e)^2} \\ b' &= -\frac{\sin R \cos R (N'_e + 4R' Q_e) + (\cos^2 R - \sin^2 R) (R' N_e - Q'_e)}{(l_e + u_e)} + \frac{(\sin R \cos R \cdot N_e + (\cos^2 R - \sin^2 R) Q_e) u'_e}{(l_e + u_e)^2} \\ c' &= \frac{-2 \sin R \cos R (R' N_e - Q'_e) + \cos^2 R \cdot N'_e - 2(\cos^2 R - \sin^2 R) R' Q_e}{(l_e + u_e)} - \frac{(\cos^2 R \cdot N_e - 2 \sin R \cos R \cdot Q_e) u'_e}{(l_e + u_e)^2} \\ Q'_e &= \frac{(M'_{ei} + M'_{ej})(l_e + u_e) - (M_{ei} + M_{ej}) u'_e}{(l_e + u_e)^2} \end{aligned}$$

○ $\partial \bar{\mathbf{q}}^c / \partial r_{\alpha k}$ について

(D-2)式中に含まれる $\partial \bar{\mathbf{q}}^c / \partial r_{\alpha k}$ を示す。 $\bar{\mathbf{q}}$ は次式で表される各要素の内力ベクトル $\bar{\mathbf{q}}$ を重ね合わせることで得られる。

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{T}^T \mathbf{T}_e^T \mathbf{q}_e \quad (\text{D-33})$$

上式を $r_{\alpha k}$ で偏微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial r_{\alpha k}} = \frac{\partial \mathbf{T}^T}{\partial r_{\alpha k}} \mathbf{T}_e^T \mathbf{q}_e + \mathbf{T}^T \frac{\partial \mathbf{T}_e^T}{\partial r_{\alpha k}} \mathbf{q}_e + \mathbf{T}^T \mathbf{T}_e^T \frac{\partial \mathbf{q}_e}{\partial r_{\alpha k}} \quad (\text{D-34})$$

付録 E

既約表現

点群 C_{6v} の対称性を持つ場合、本文中に示したように表現行列 $\mathbf{D}(R)$ が12個ある。これらの表現は基底の取り方に依存する。基底を上手く選ぶことで、これら12個の表現行列を一斉に対角化することができる（一部はブロック対角化になる）。これ以上の対角化はできない状態にした表現を既約な表現と呼び、逆に、既約でない表現を可約な表現と呼ぶ。 C_{6v} の対称性を持つものの表現行列を既約な表現とした場合、その表現行列は、必ず下の表に示す $A_1, A_2, B_1, B_2, E_1, E_2$ の6つの既約表現の直和で表されることがわかっている。

Table E-1 既約表現の指標

C_{6v}	E	$2C_6$	$2C_6^2$	C_6^3	$2\sigma_y$	$2\sigma_x$
A_1	1	1	1	1	1	1
A_2	1	1	1	1	-1	-1
B_1	1	-1	1	-1	1	-1
B_2	1	-1	1	-1	-1	1
E_1	2	1	-1	-2	0	0
E_2	2	-1	-1	2	0	0

表中の最上行は対称操作を（ただし12個の対称操作のうち同じ性質のものは一纏めにしてある。これを類といい、 C_{6v} では6個の類に分けられる）、最左列に既約表現を示しており、表内の1や-1といった値は表現行列が対角化された際の対角項の値を表す。ただし、 E_1 と E_2 の表現は完全には対角化されず 2×2 のブロック行列となる。 E_1 と E_2 の値はこのブロック行列の跡が記入されている。

本文中(II-3-10)式は、 $\mathbf{D}(R)\phi_i$ もまた固有ベクトルであることを示している。これは例えば、単根の固有値 λ_i を与える固有ベクトル ϕ_i を $\mathbf{D}(R)$ によって1次変換した場合、 ϕ_i が単にスカラー倍されることを意味する。 $\mathbf{D}(R)$ は12個あり、全てについてこれが成り立ため、 ϕ_i は $\mathbf{D}(R)$ を一斉に対角化した際の基底となる。よって、固有ベクトル ϕ_i は既約表現の基底となる。固有値が d 重に縮退している場合においても、対称操作 $\mathbf{D}(R)$ は縮退している d 個の固有ベクトルの間にのみ一次変換を引き起こすので、一般には既約表現を与えると考えてよい。ただし、縮退度が既約表現の次元より大きい場合など、 d 個のベクトルが二つ以上の組に別れ、それぞれの中だけで変換が起こる場合も考えられる。この場合は、二つ以上の既約表現の固有値が偶然一致したものと見なせばよい。（本文中では、この種の固有値の一致が最適化によって引き起こされることが示される。）